



UNIVERSITA' DEGLI STUDI DELLA BASILICATA
Scuola di Ingegneria



Corso di
TECNICA DELLE COSTRUZIONI

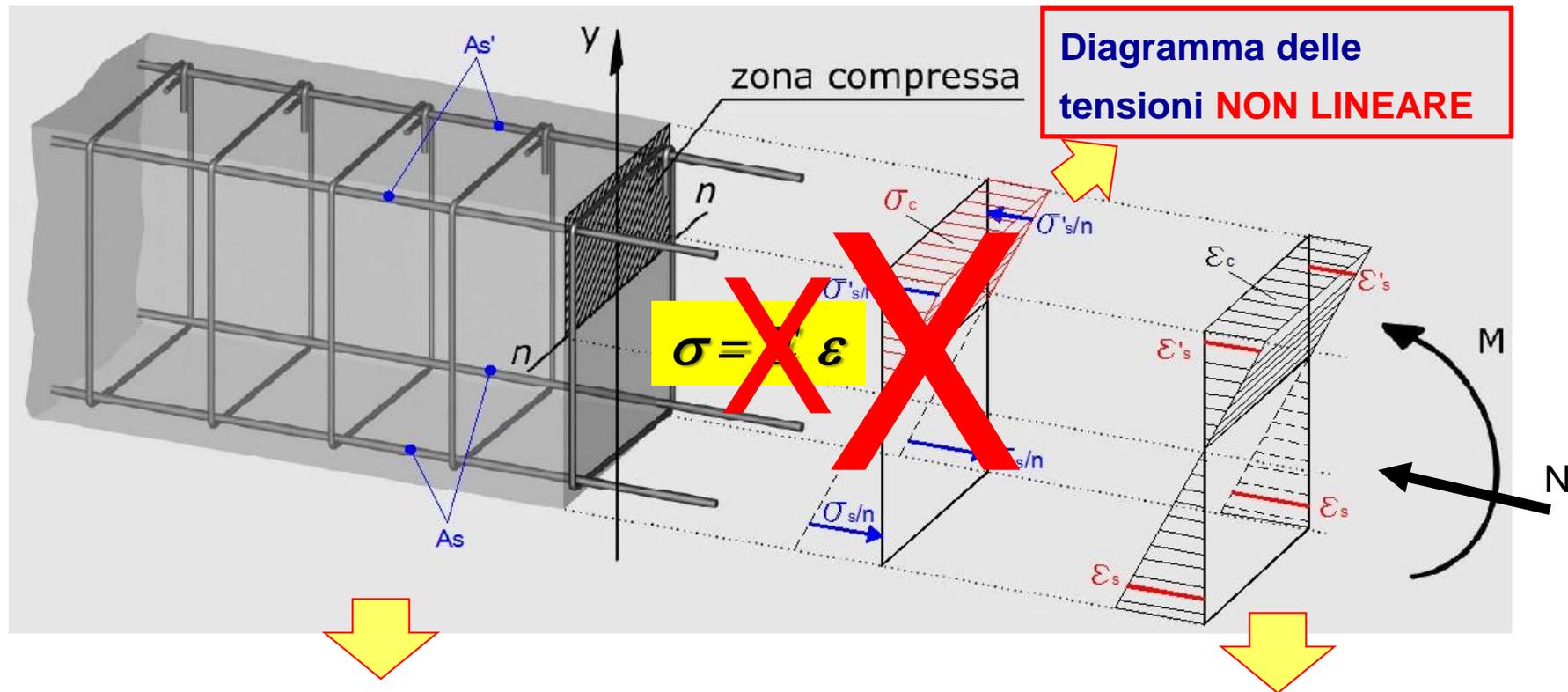
LO STATO LIMITE ULTIMO
PER TENSIONI NORMALI

Docente:
Prof. Ing. Angelo MASI

Collaboratori:
Ing. Vincenzo MANFREDI
Ing. Giuseppe VENTURA

Stato Limite Ultimo (SLU) per tensioni normali

TRAVI INFLESSE IN C.A.: dall'analisi lineare all'analisi NON lineare



Trave in c.a. con armatura superiore compressa (A_s') e armatura inferiore tesa (A_s)

Diagramma lineare delle deformazioni

SLU per SFORZO NORMALE E FLESSIONE

Capitolo 4 del Decreto Ministeriale 17.01.2018 - NTC-18

§4.1.2.3 - STATI LIMITE ULTIMI

§4.1.2.3.4 – Resistenza flessionale in presenza e in assenza di sforzo assiale

IPOTESI DI CALCOLO

- conservazione delle sezioni piane
- perfetta aderenza acciaio-calcestruzzo
- resistenza a trazione del calcestruzzo nulla
- ✓ **la crisi del cls è determinata dal raggiungimento della sua capacità deformativa ultima a compressione**
- ✓ **le tensioni del cls e dell'armatura sono valutate attraverso i diagrammi tensioni-deformazione (σ - ε)**

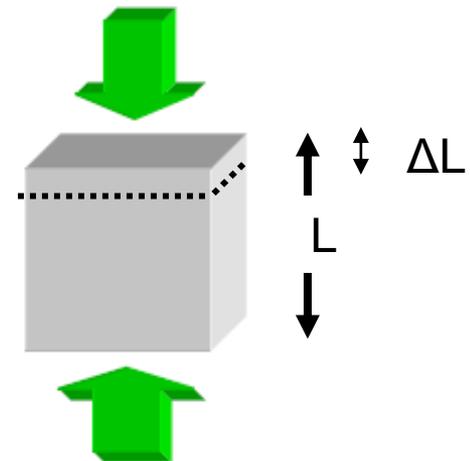
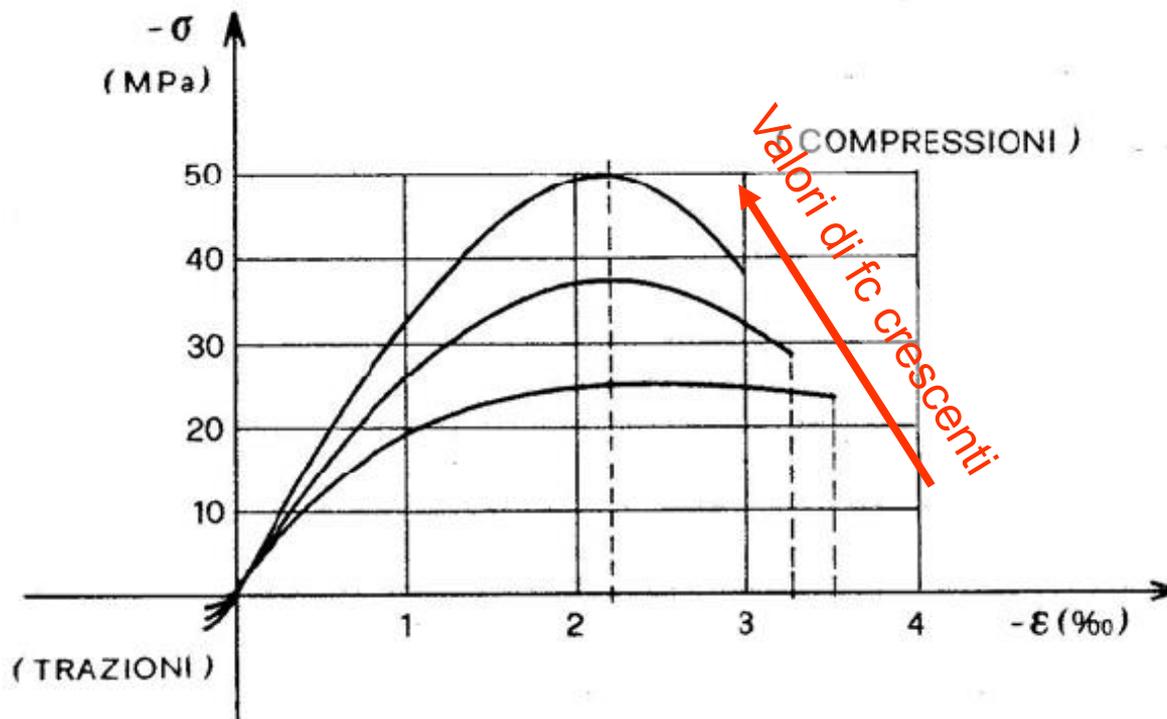
Viene abbandonata l'ipotesi di comportamento elastico dei materiali !!

IL COMPORTAMENTO MECCANICO DEL CLS

I risultati di una **prova di compressione** sono generalmente restituiti sotto forma di **diagramma tensioni-deformazioni** (σ - ϵ).

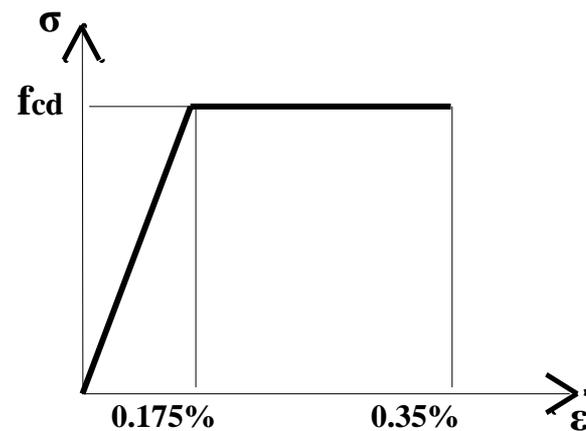
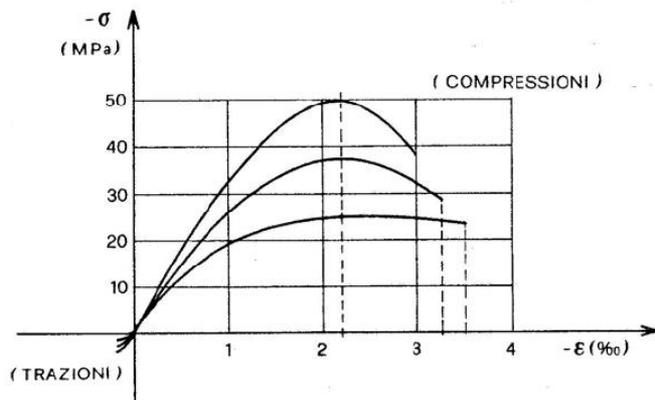
$\sigma = P/A$ (P carico; A area del provino)

$\epsilon = \Delta L/L$ (ΔL accorciamento e L lunghezza originaria del provino)

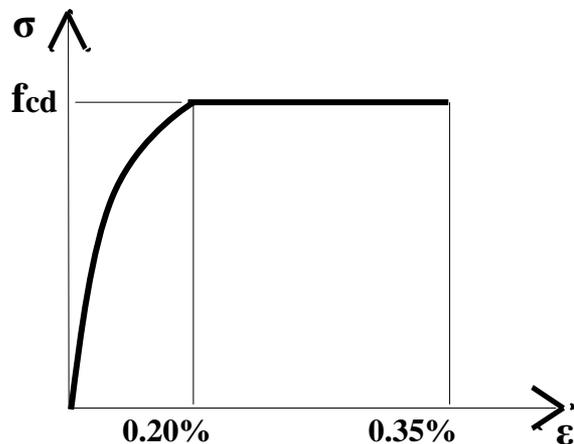


DIAGRAMMI DI CALCOLO TENSIONI – DEFORMAZIONI DEL CLS

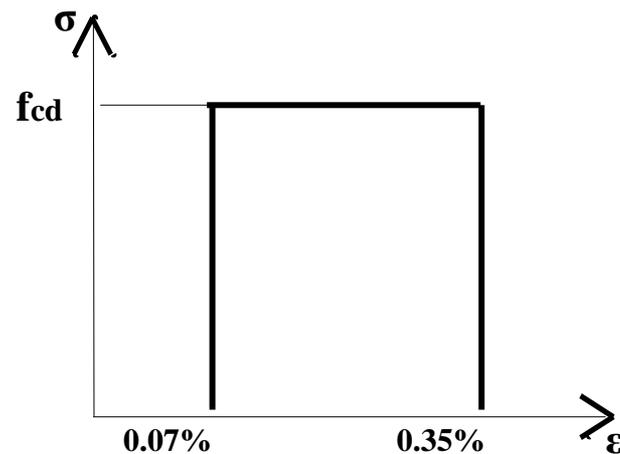
§4.1.2.1.1 – Resistenza di progetto a compressione del calcestruzzo



(b) triangolo-rettangolo



(a) parabola-rettangolo

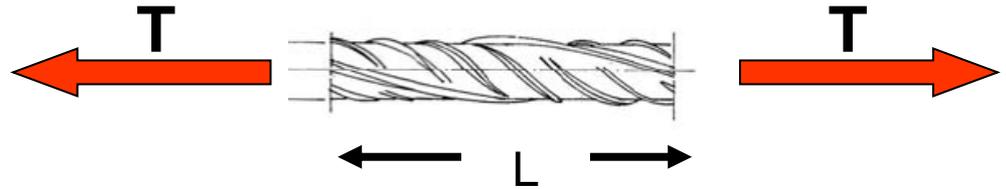


(c) rettangolo (stress block)

f_{cd} = resistenza di calcolo a compressione

L'ACCIAIO DA C.A.

Sottoponendo una **barra di acciaio a prova di trazione** si ottengono diversi tipi di diagrammi (σ - ϵ).



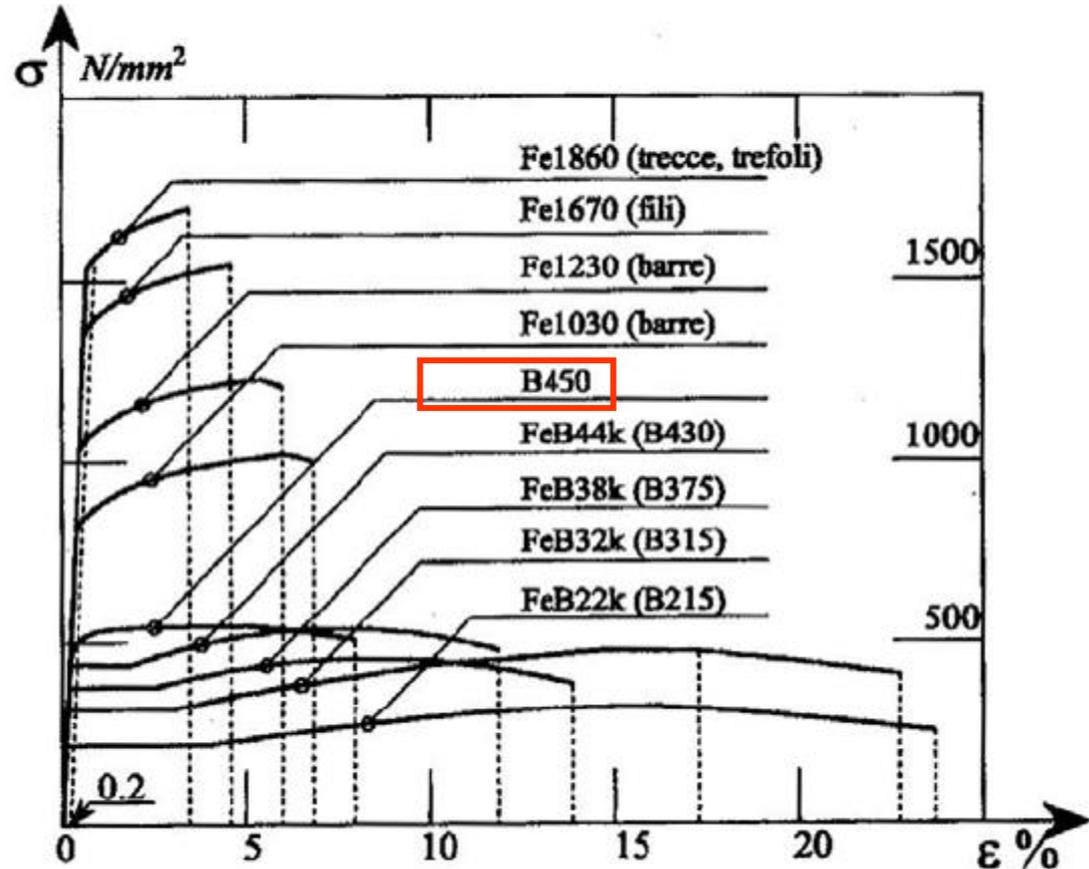
Per gli acciai da c.a., la norma italiana NTC-18 prevede due tipi, indicati con le sigle B450A e **B450C**.

Di fatto può essere utilizzato soltanto il B450C, che è obbligatorio in zona sismica, avente i seguenti valori nominali delle proprietà meccaniche:

$$f_{y,nom} = 450 \text{ MPa}$$

$$f_{t,nom} = 540 \text{ MPa}$$

$$\epsilon_{uk} \geq 7.5\%$$



DIAGRAMMI DI CALCOLO TENSIONI – DEFORMAZIONE DELL'ACCIAIO

§4.1.2.1.1.3 – Resistenza di progetto dell'acciaio

a) bi-lineare con incrudimento

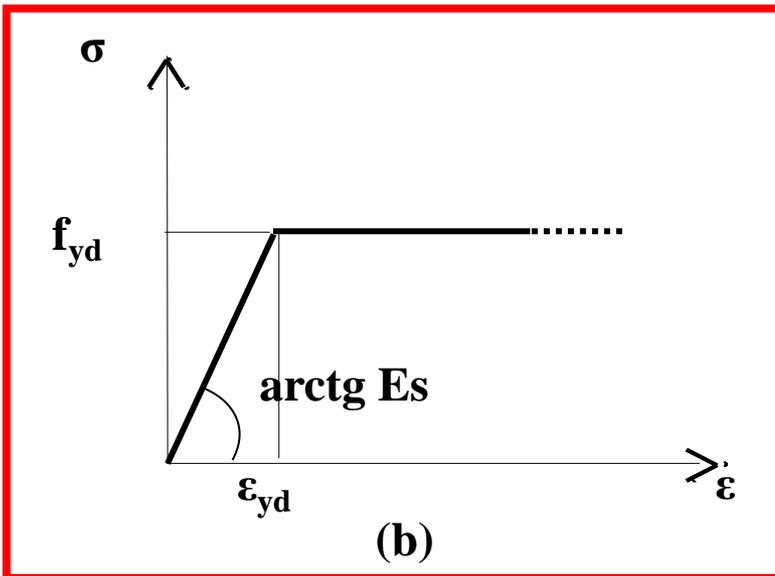
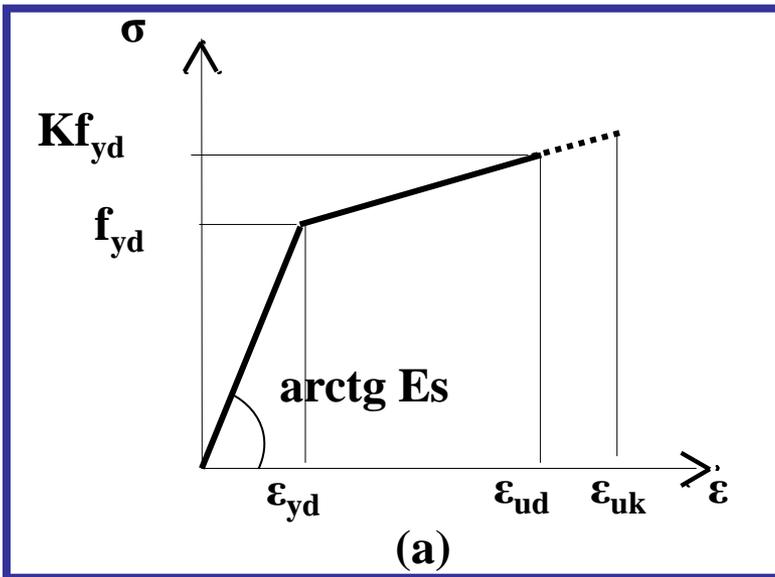
$$\varepsilon_{ud} = 0.9 \varepsilon_{uk}$$

$$\varepsilon_{uk} = \geq 7.5\%$$

$$K = f_{yk}/f_{yd} \quad (1.35 > K \geq 1.15)$$

(valori per acciaio B450C, § 11.3.2.1 NTC-18)

b) elastico-perfettamente plastico indefinito



RESISTENZE DI CALCOLO

§4.1.2.1.1 Resistenze di progetto dei materiali

Le **resistenze di calcolo** si valutano mediante l'espressione:

$$f_d = \frac{f_k}{\gamma_m}$$

dove **f_k** è la **resistenza caratteristica**, **γ_m** il **coefficiente parziale del materiale**.

Per elementi strutturali in c.a., la normativa NTC18 prescrive :

		γ_m
calcestruzzo	γ_C	1.5
acciaio per cls	γ_S	1.15

PARAMETRI DI RESISTENZA DEL CALCESTRUZZO

Resistenza di calcolo a compressione

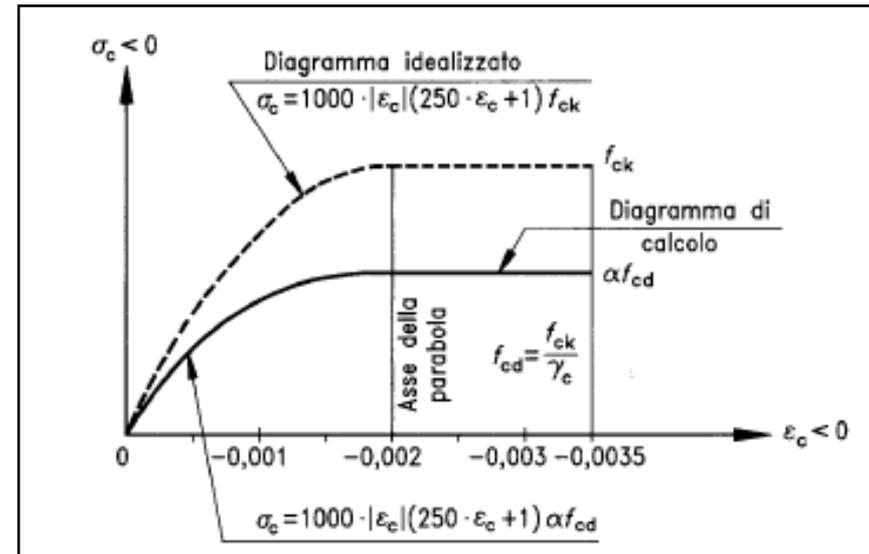
$$f_{cd} = \frac{\alpha_{cc} \cdot f_{ck}}{\gamma_c}$$

$$f_{ck} = R_{ck} \cdot 0.83$$

valore caratteristico della resistenza cilindrica

$$\alpha_{cc} = 0.85$$

coefficiente per carichi di lunga durata



Altri parametri meccanici

Resistenza media a trazione: $f_{ctm} = 0.3 \cdot f_{ck}^{2/3}$

Modulo elastico: $E_{cm} = 22000 \cdot [f_{cm} / 10]^{0.3}$ dove: $f_{cm} = f_{ck} + 8$ [in N/mm²]

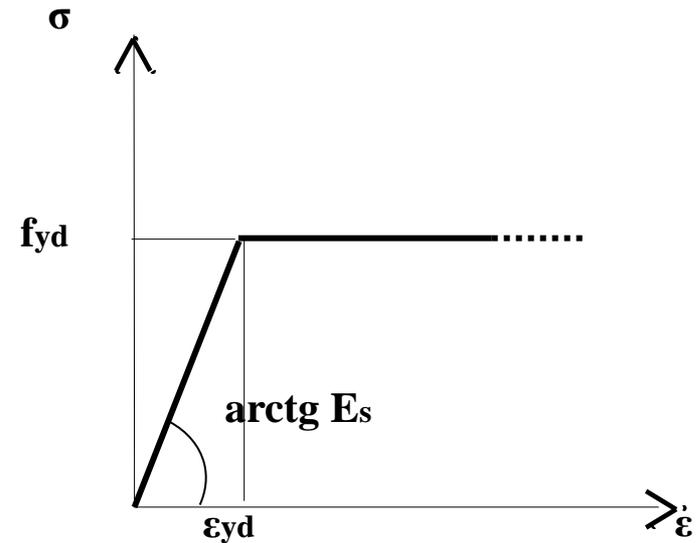
Modulo di Poisson: $\nu = 0.2$ [per cls fessurato si può porre $\nu = 0$]

PARAMETRI DI RESISTENZA DELL'ACCIAIO

Resistenza a trazione/compressione

$$f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s}$$

f_{yk} è la resistenza caratteristica di snervamento



(b)

Altri parametri meccanici

Modulo elastico: $E_s = 210000 \text{ N/mm}^2$

Deformazione al limite elastico: $\epsilon_{yd} = \frac{f_{yd}}{E_s}$

Ad es. per un acciaio B450C si ha:

$$f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s} = \frac{450}{1.15} = 391.3 \text{ N/mm}^2$$

$$\epsilon_{yd} = \frac{f_{yd}}{E_s} = \frac{391.3}{210000} = 0.186\%$$

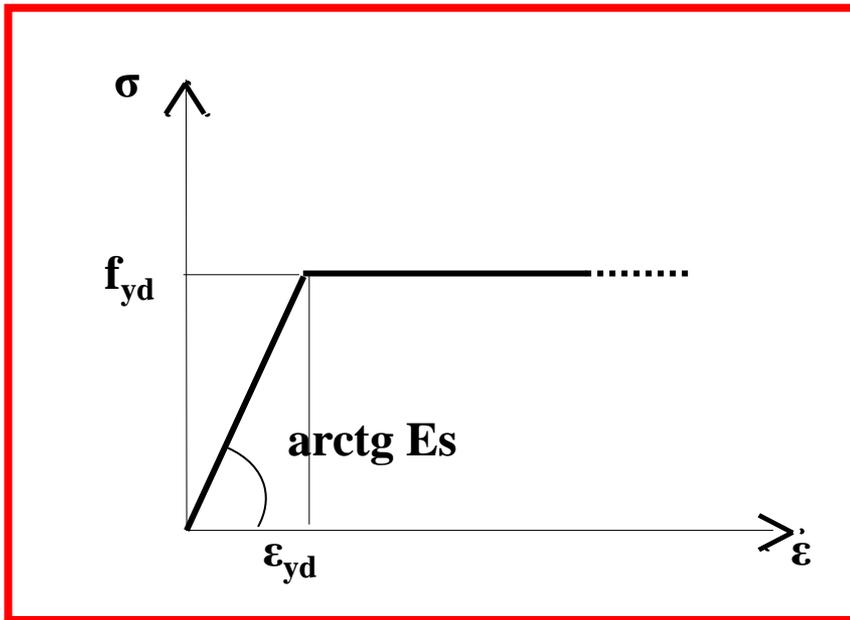


Diagramma elastico-perfettamente plastico indefinito

Equazioni costitutive (acciaio teso)

$$\varepsilon_s < \varepsilon_{yd} \Rightarrow \sigma_s = \varepsilon_s \cdot E_s$$

$$\varepsilon_s \geq \varepsilon_{yd} \Rightarrow f_{yd}$$

...allo stesso modo per acciaio compresso:

$$\varepsilon'_s < \varepsilon_{yd} \Rightarrow \sigma'_s = \varepsilon'_s \cdot E_s$$

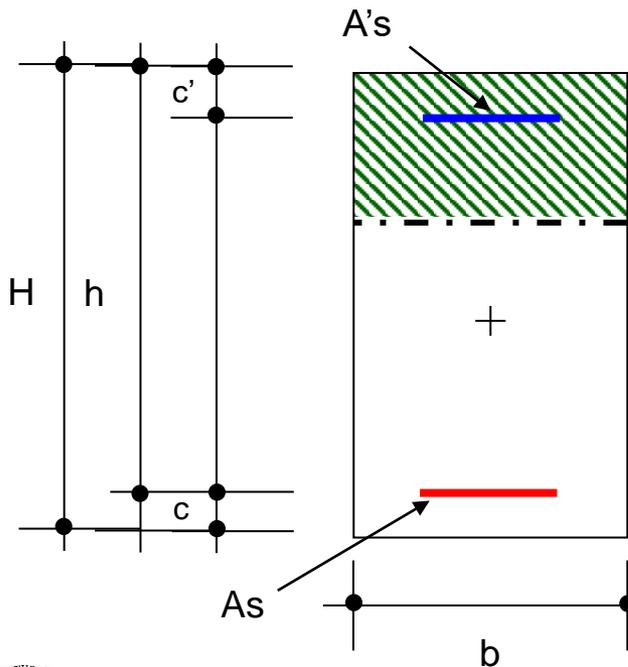
$$\varepsilon'_s \geq \varepsilon_{yd} \Rightarrow f_{yd}$$

S.L.U.: SFORZO NORMALE E FLESSIONE

Equazioni di congruenza

$$\frac{0.35\%}{x} = \frac{\varepsilon'_s}{x - c'} = \frac{\varepsilon_s}{h - x}$$

N_{Ed} e M_{Ed} = valori di calcolo dello sforzo normale e del momento flettente agenti sulla sezione



Equazioni costitutive (acciaio)

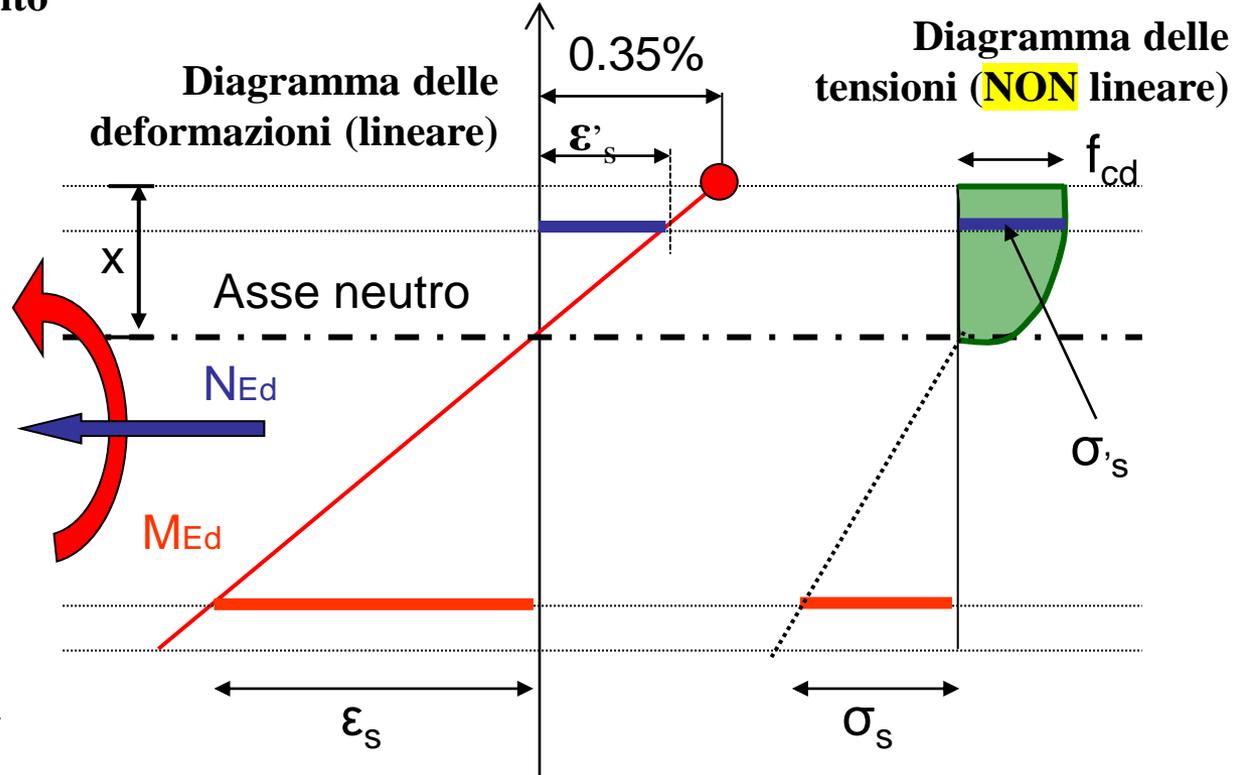
$$\varepsilon_s < \varepsilon_{yd} \Rightarrow \sigma_s = \varepsilon_s \cdot E_s$$

$$\varepsilon'_s < \varepsilon_{yd} \Rightarrow \sigma'_s = \varepsilon'_s \cdot E_s$$

oppure

$$\varepsilon_s \geq \varepsilon_{yd} \Rightarrow f_{yd}$$

$$\varepsilon'_s \geq \varepsilon_{yd} \Rightarrow f_{yd}$$



S.L.U.: SFORZO NORMALE E FLESSIONE

Risultante di compressione (CLS)

$$C = b \cdot \psi \cdot x \cdot f_{cd}$$

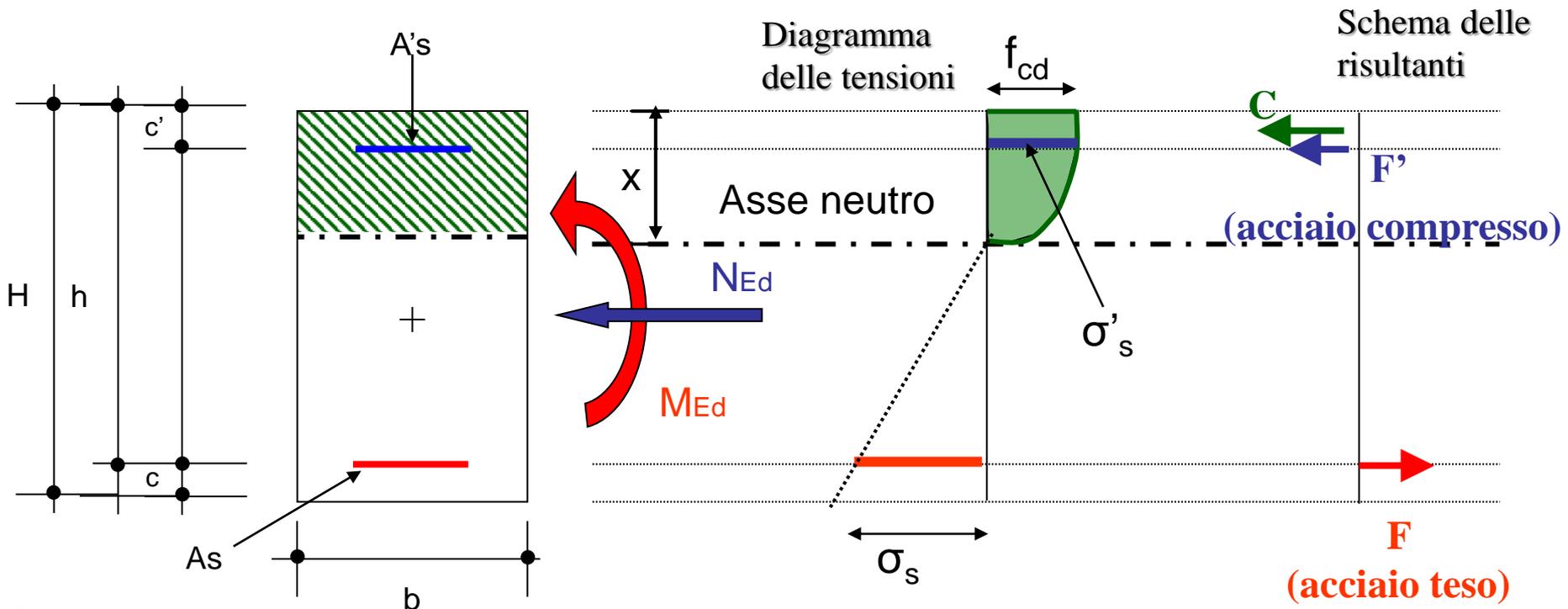
Risultante di compressione (acciaio)

$$F' = A'_s \cdot \sigma'_s$$

Risultante di trazione (acciaio)

$$F = A_s \cdot \sigma_s$$

$$\psi = \frac{\int_0^x \sigma(y) dy}{f_{cd} x}$$



S.L.U.: SFORZO NORMALE E FLESSIONE

EQUAZIONI DI EQUILIBRIO

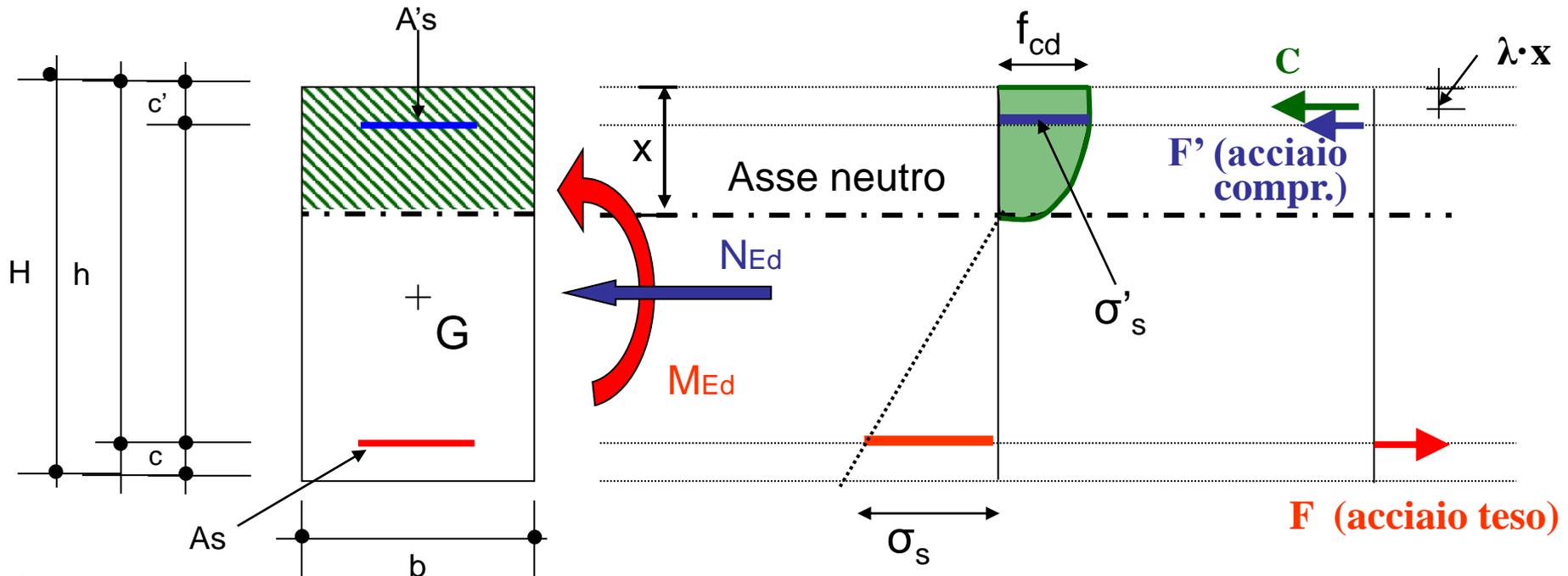
$$N_{Ed} = -b \cdot \psi \cdot x \cdot f_{cd} - A'_s \cdot \sigma'_s + A_s \cdot \sigma_s$$

Equilibrio alla traslazione lungo l'asse della trave

dove:
$$\lambda = \frac{1}{x} \cdot \frac{\int_0^x \sigma(y)(x-y)dy}{\int_0^x \sigma(y)dy}$$

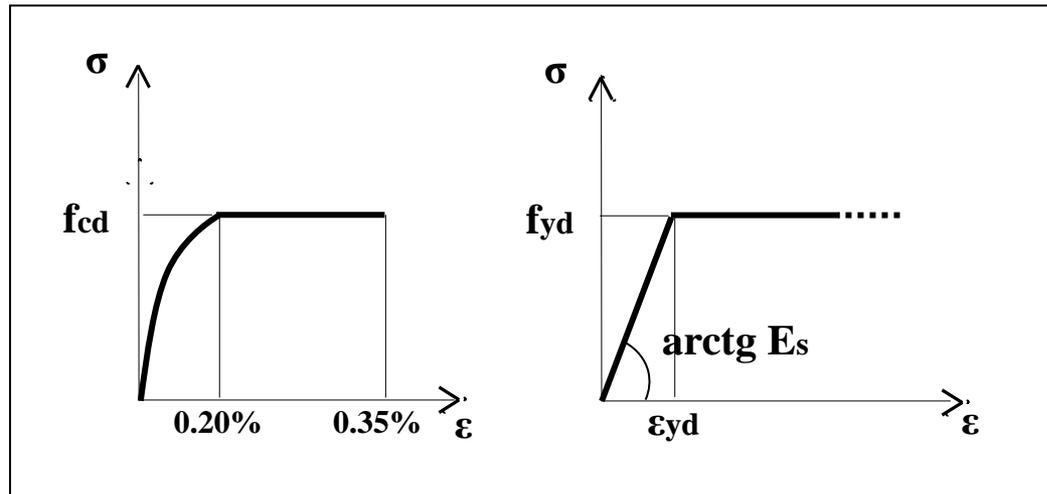
$$M_{Ed} = b \cdot \psi \cdot x \cdot f_{cd} \cdot (H/2 - \lambda \cdot x) + A'_s \cdot \sigma'_s (H/2 - c') + A_s \cdot \sigma_s (H/2 - c)$$

Equilibrio alla rotazione rispetto all'asse passante per il baricentro geometrico G



Regioni di rottura

(individuate dalla deformata della sezione)



S.L.U.: SFORZO NORMALE E FLESSIONE

Posizione ASSE NEUTRO

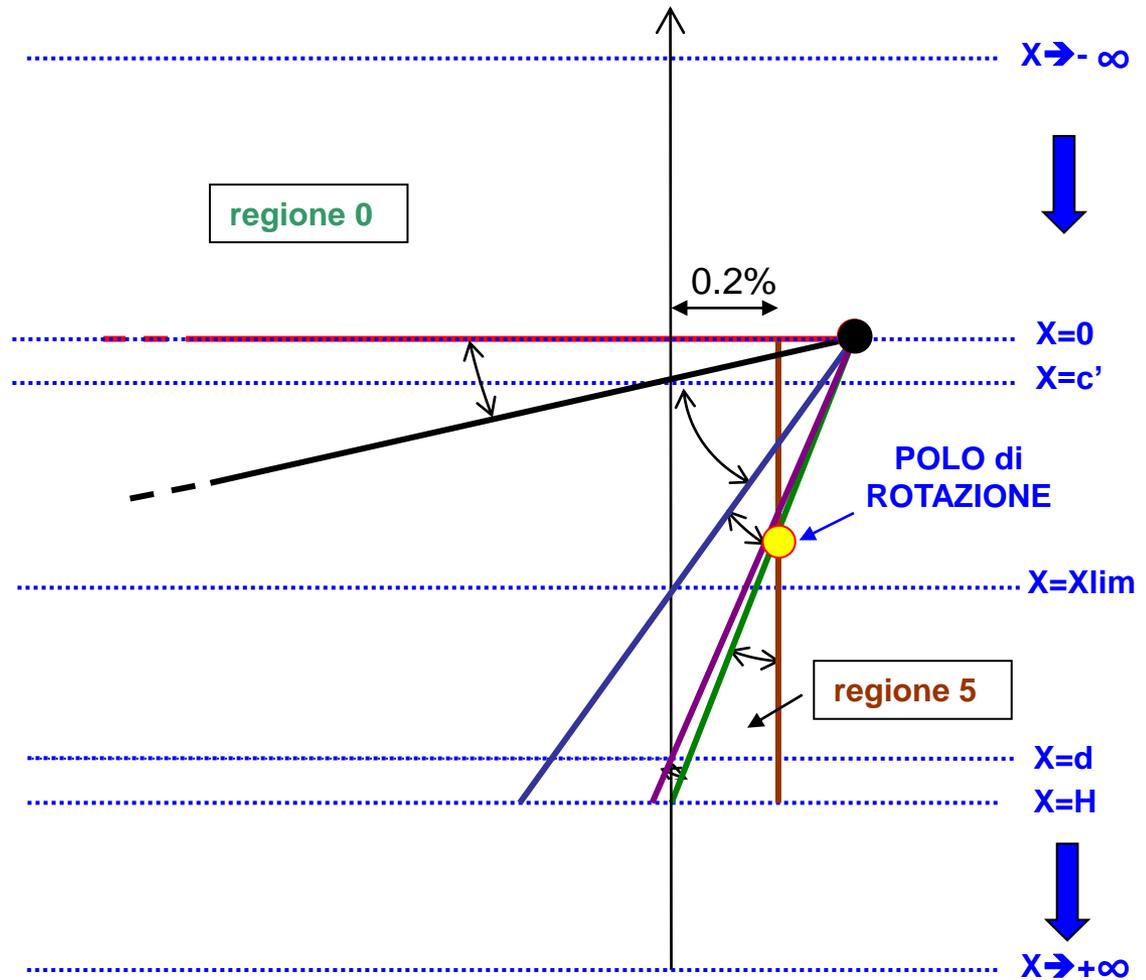
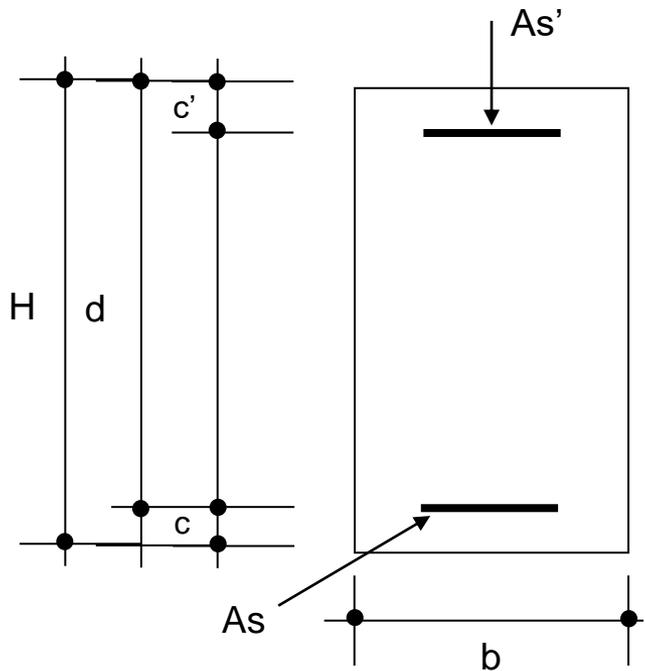
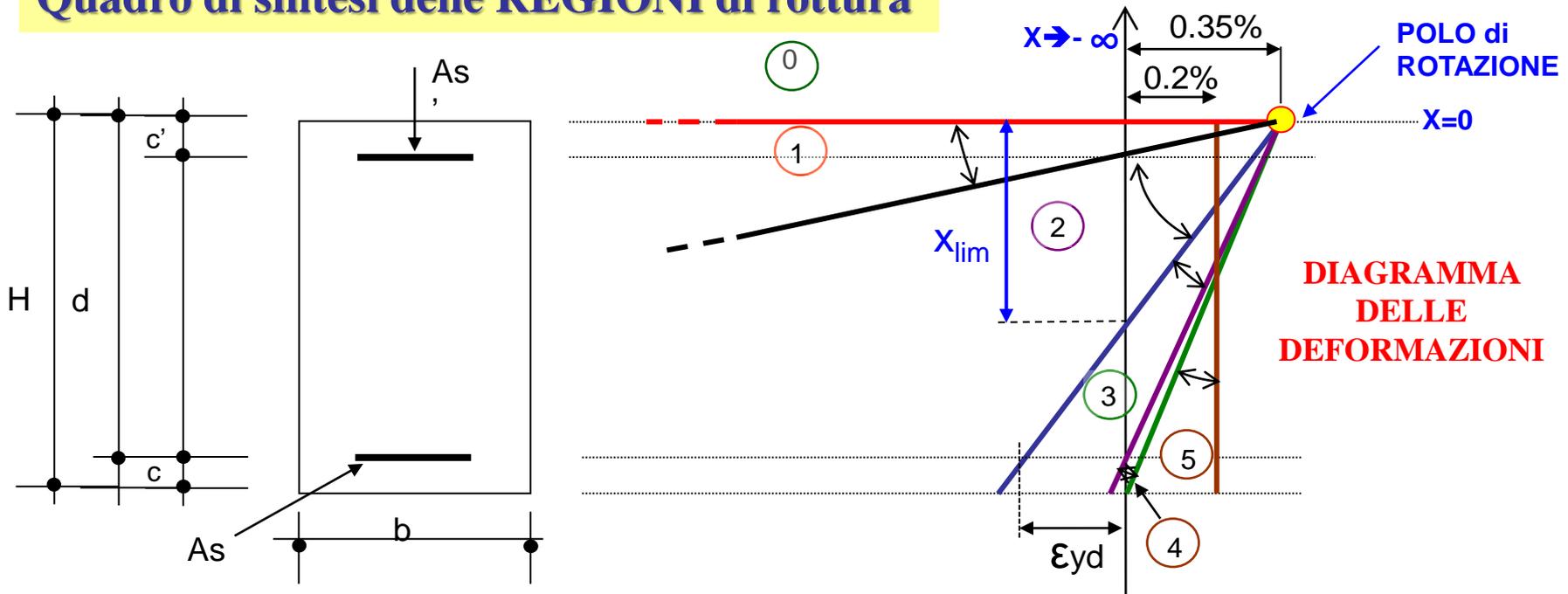


DIAGRAMMA
DELLE DEFORMAZIONI

S.L.U.: SFORZO NORMALE E FLESSIONE

Quadro di sintesi delle REGIONI di rottura



Regione 0: posizione asse neutro $-\infty < x < 0 \rightarrow$ trazione semplice o composta

Regione 1: posizione asse neutro $0 \leq x < c' \rightarrow$ flessione semplice o composta

Regione 2: posizione asse neutro $c' \leq x < x_{lim} \rightarrow$ flessione semplice o composta

Regione 3: posizione asse neutro $x_{lim} \leq x < h \rightarrow$ flessione semplice o composta

Regione 4: posizione asse neutro $h \leq x < H \rightarrow$ flessione semplice o composta

Regione 5: posizione asse neutro $H \leq x < \infty \rightarrow$ compressione semplice o composta

REGIONE DI ROTTURA 0

Posizione asse neutro $-\infty < x < 0$, trazione semplice o composta

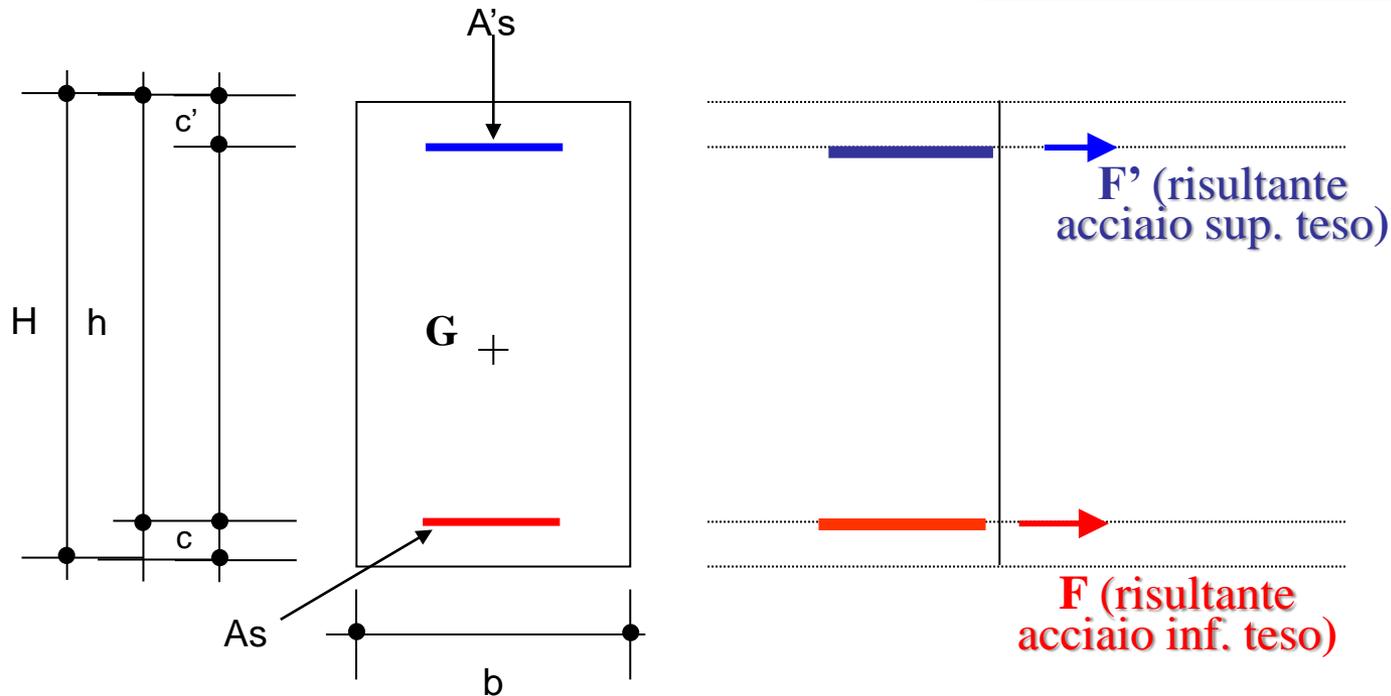
Equazioni di equilibrio

$$N_{Rd} = A'_s \cdot f_{yd} + A_s \cdot f_{yd}$$

$$M_{rd} = A'_s f_{yd} \left(\frac{H}{2} - c' \right) - A_s f_{yd} \left(\frac{H}{2} - c \right)$$

Il CLS è teso e non contribuisce.

L'armatura (sia superiore che inferiore) è sempre snervata



REGIONE DI ROTTURA 1

Posizione asse neutro: $0 \leq x < c'$, flessione semplice o composta

Equazioni di congruenza

$$\frac{0.35\%}{x} = \frac{\varepsilon'_s}{c' - x} = \frac{\varepsilon_s}{h - x}$$

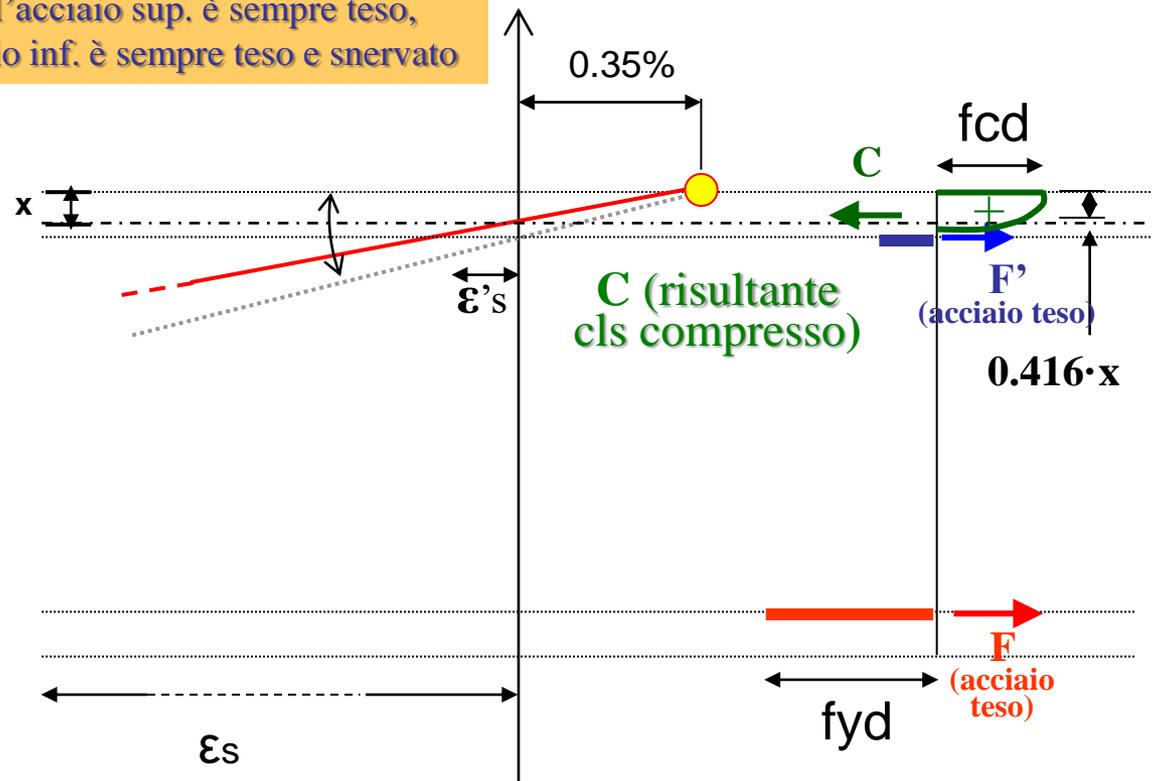
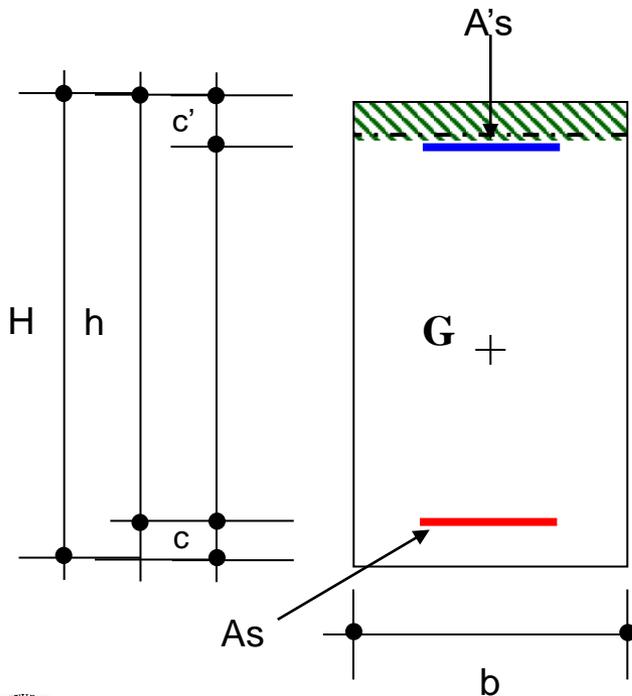
Equazioni costitutive

$$\varepsilon_s \geq \varepsilon_{yd} \Rightarrow f_{yd}$$

$$\varepsilon'_s < \varepsilon_{yd} \Rightarrow \sigma'_s = \varepsilon'_s \cdot E_s$$

$$\varepsilon'_s \geq \varepsilon_{yd} \Rightarrow f_{yd}$$

In Reg.1 l'acciaio sup. è sempre teso, mentre quello inf. è sempre teso e snervato



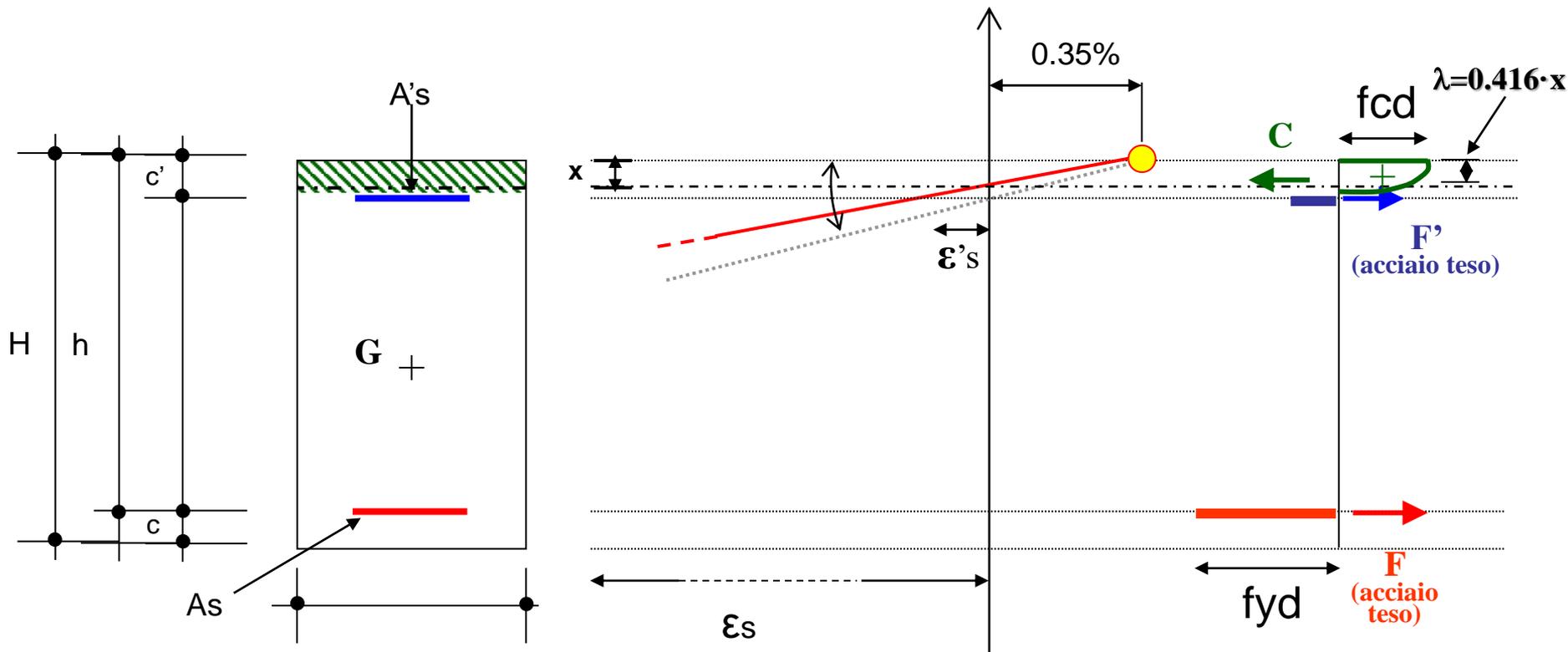
REGIONE DI ROTTURA 1

Posizione asse neutro: $0 \leq x < c'$, flessione semplice o composta

Equazioni di equilibrio

$$N_{Rd} = -b \cdot 0.81 \cdot x \cdot f_{cd} + A'_s \cdot \sigma'_s + A_s \cdot f_{yd}$$

$$M_{Rd} = +b \cdot 0.81 \cdot x \cdot f_{cd} \cdot \left(\frac{H}{2} - 0.416 \cdot x \right) - A'_s \cdot \sigma'_s \left(\frac{H}{2} - c' \right) + f_{yd} \cdot A_s \left(\frac{H}{2} - c \right)$$



REGIONE DI ROTTURA 2

Posizione asse neutro $c' \leq x < x_{lim}$, flessione semplice o composta

Equazioni di congruenza

$$\frac{0.35\%}{x} = \frac{\varepsilon'_s}{x - c'} = \frac{\varepsilon_s}{h - x}$$

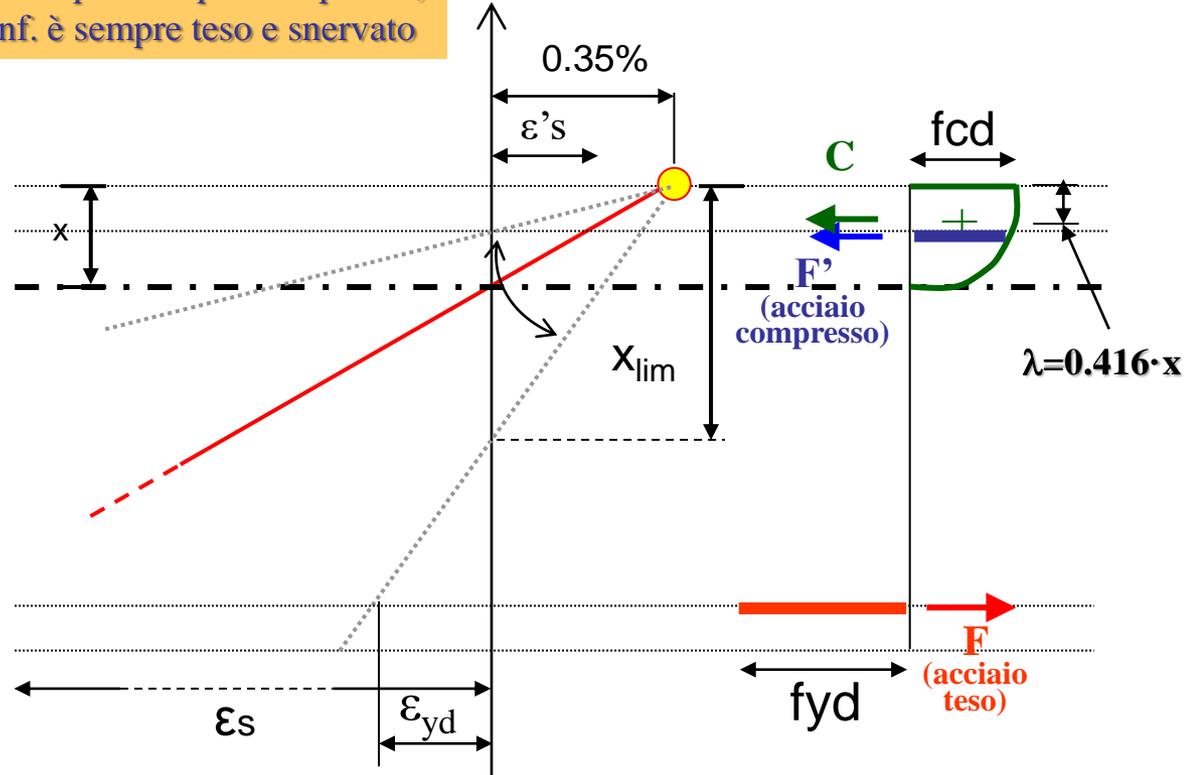
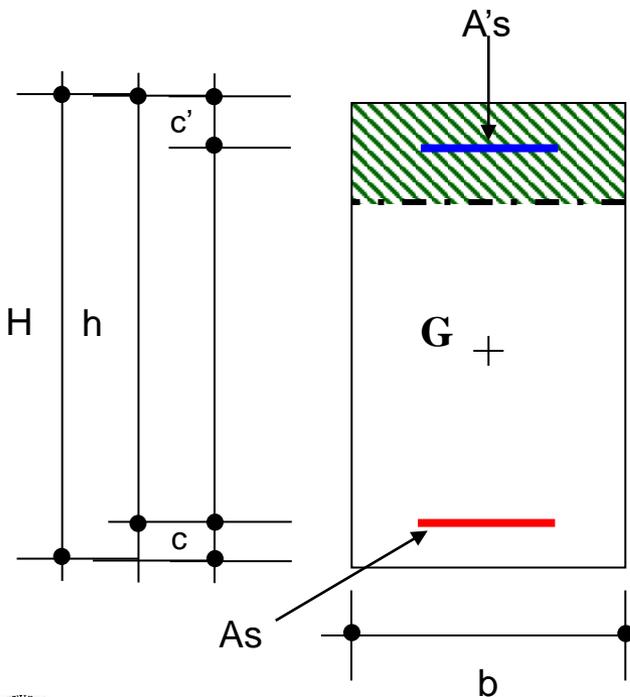
Equazioni costitutive

$$\varepsilon_s \geq \varepsilon_{yd} \Rightarrow f_{yd}$$

$$\varepsilon'_s < \varepsilon_{yd} \Rightarrow \sigma'_s = \varepsilon'_s \cdot E_s$$

$$\varepsilon'_s \geq \varepsilon_{yd} \Rightarrow f_{yd}$$

In Reg.2 l'acciaio sup. è sempre compresso, mentre quello inf. è sempre teso e snervato

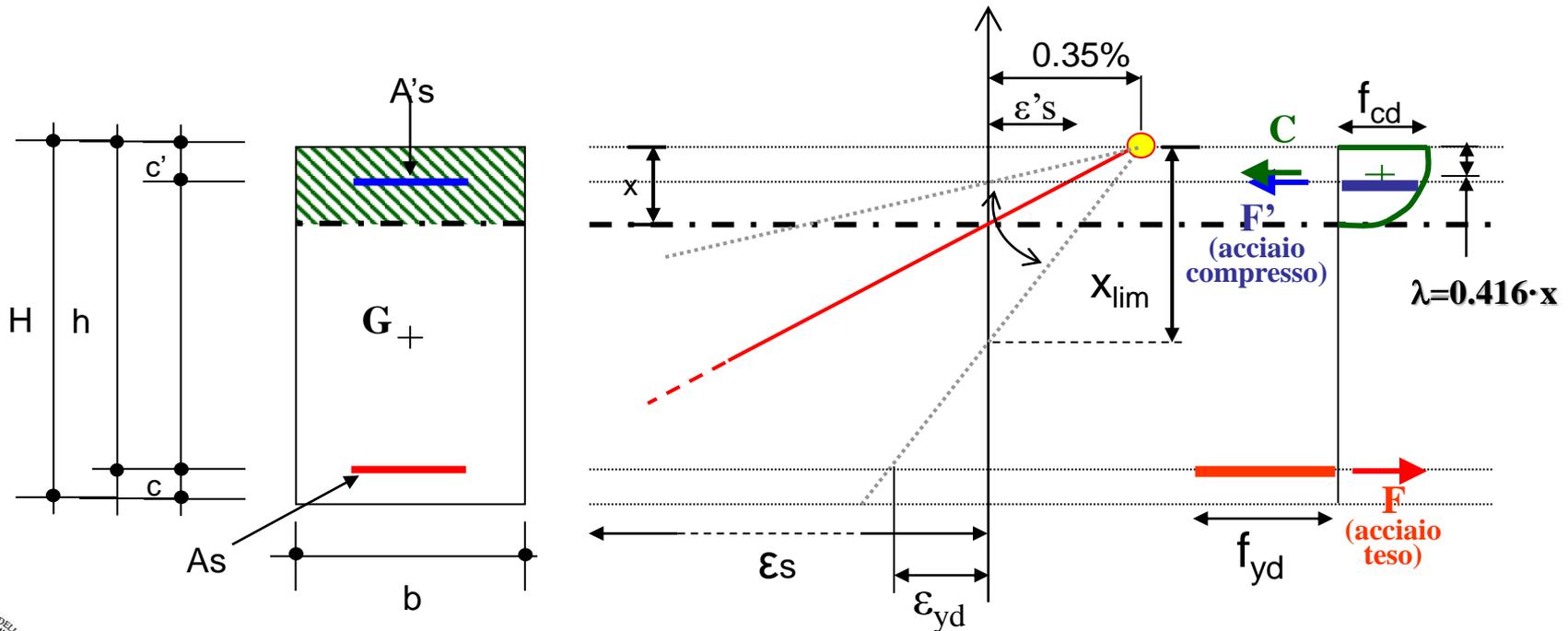


REGIONE DI ROTTURA 2

x_{lim} è la posizione assunta dall'asse neutro caratterizzata dal valore della deformazione dell'acciaio teso pari a quello di snervamento ϵ_{yd} .

Per acciai B450C x_{lim} vale:

$$\frac{x_{lim}}{0.35\%} = \frac{h - x_{lim}}{\epsilon_{yd}} \Rightarrow x_{lim} = \frac{0.35\% \cdot h}{0.35\% + \epsilon_{yd}} \approx 0.65h \quad (\epsilon_{yd} = 0.186\%)$$



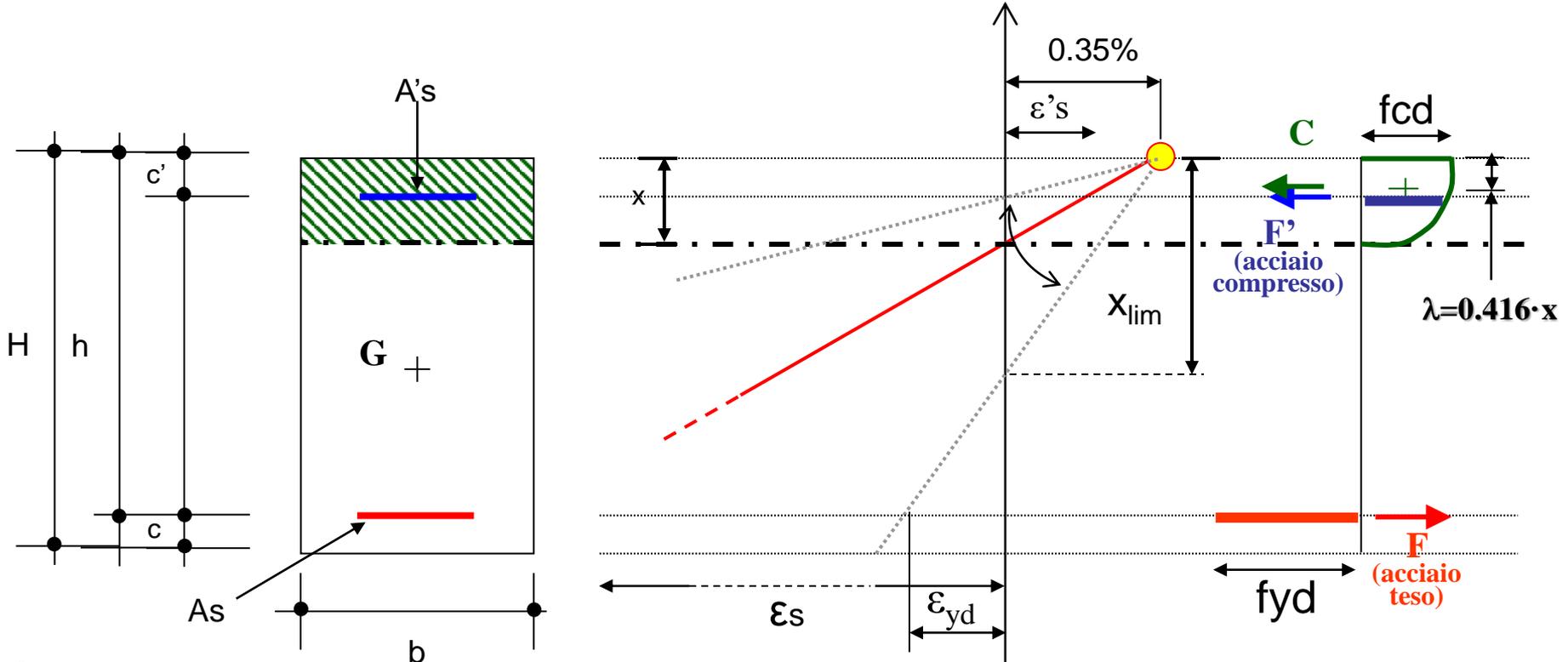
REGIONE DI ROTTURA 2

Posizione asse neutro $c' \leq x < x_{lim}$, flessione semplice o composta

Equazioni di equilibrio

$$N_{Rd} = -b \cdot 0.81 \cdot x \cdot f_{cd} - A'_s \cdot \sigma'_s + A_s \cdot f_{yd}$$

$$M_{rd} = b \cdot 0.81 \cdot x \cdot f_{cd} \cdot (H/2 - 0.416 \cdot x) + A'_s \cdot \sigma'_s (H/2 - c') + A_s \cdot f_{yd} (H/2 - c)$$



REGIONE DI ROTTURA 3

Posizione asse neutro $x_{lim} \leq x < h$, flessione semplice o composta

Equazioni di congruenza

$$\frac{0.35\%}{x} = \frac{\varepsilon'_s}{x - c'} = \frac{\varepsilon_s}{h - x}$$

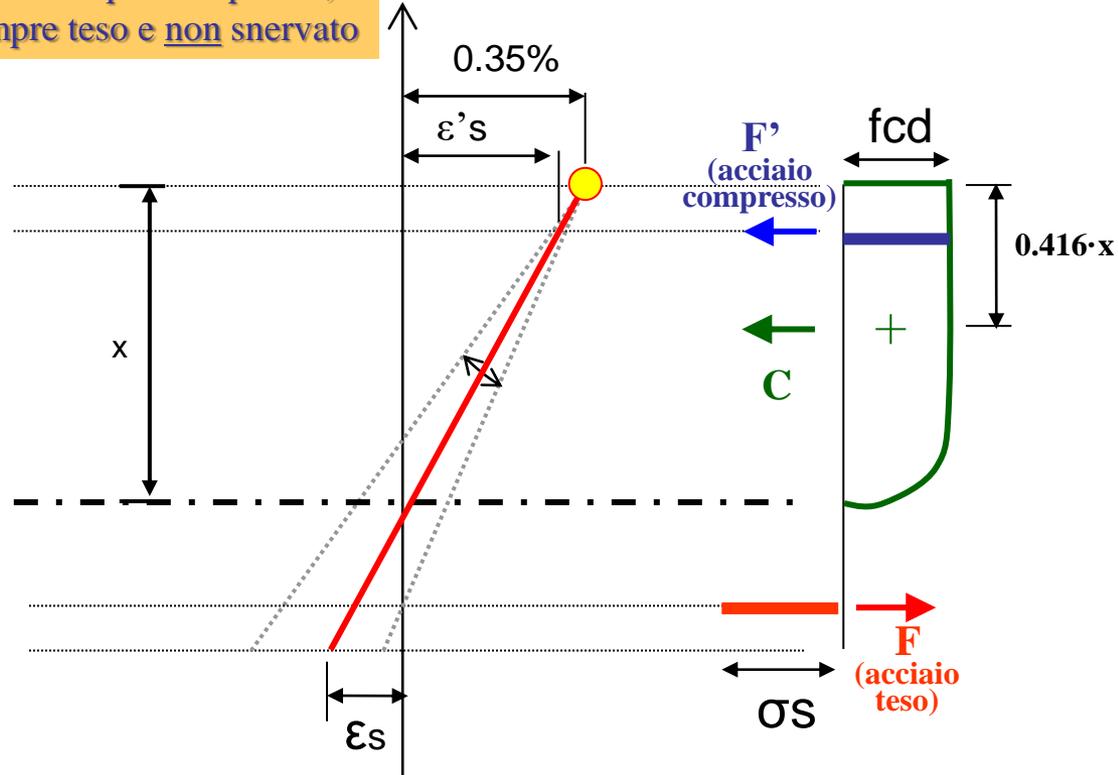
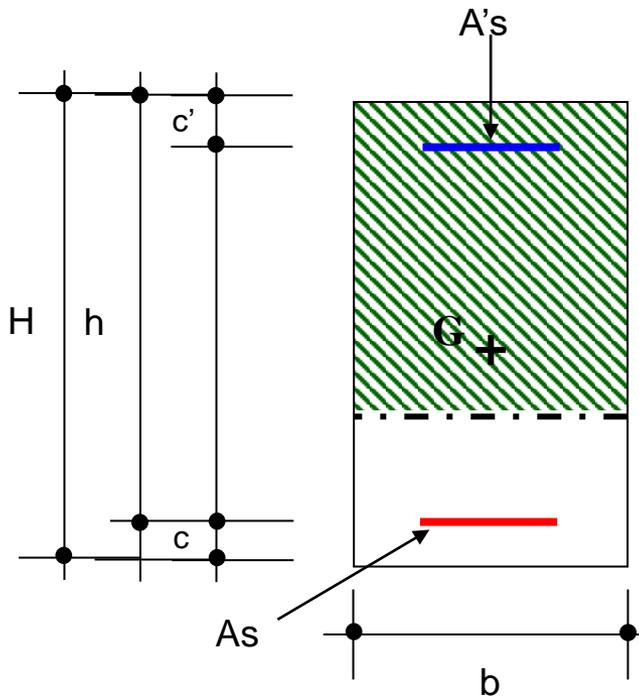
Equazioni costitutive

$$\varepsilon_s < \varepsilon_{yd} \Rightarrow \sigma_s = \varepsilon_s \cdot E_s$$

$$\varepsilon'_s < \varepsilon_{yd} \Rightarrow \sigma'_s = \varepsilon'_s \cdot E_s$$

$$\varepsilon'_s \geq \varepsilon_{yd} \Rightarrow f_{yd}$$

In Reg.3 l'acciaio sup. è sempre compresso, mentre quello inf. è sempre teso e non snervato



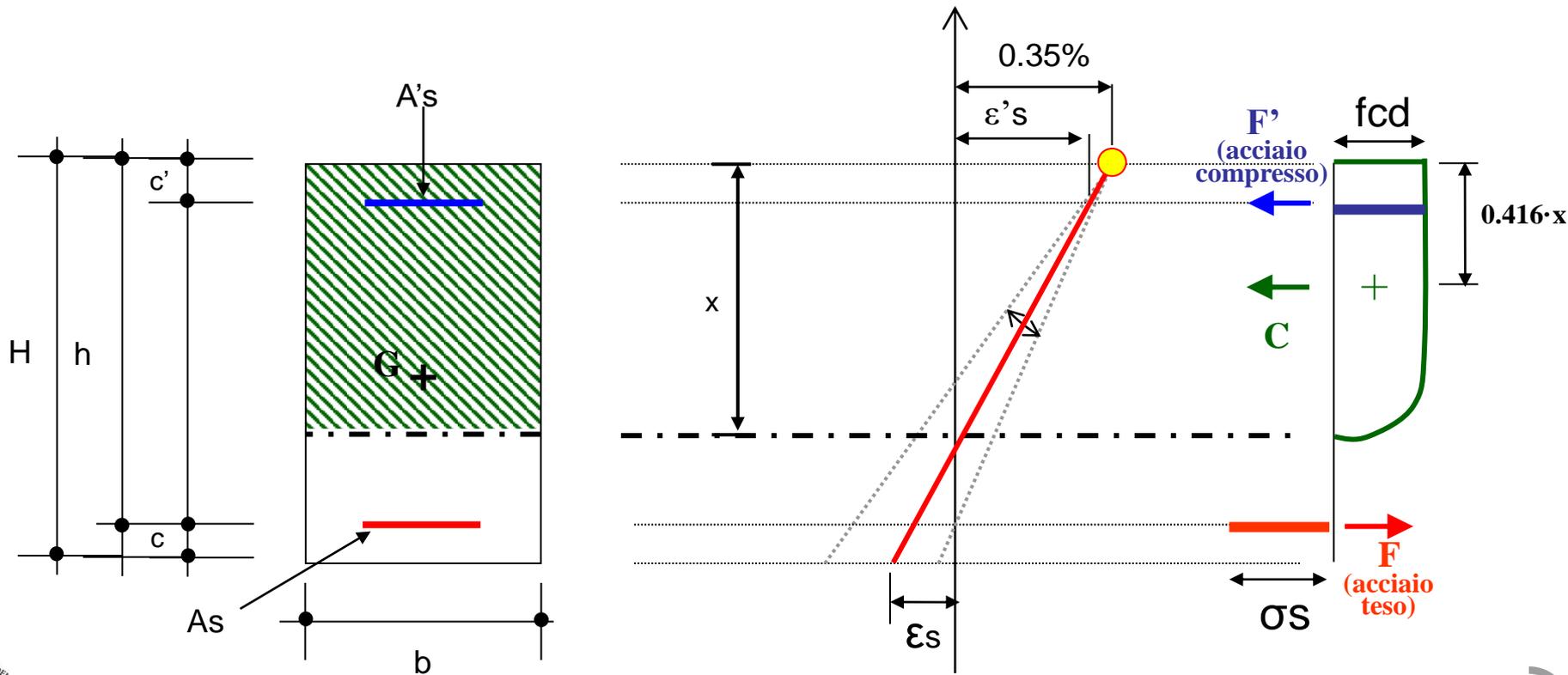
REGIONE DI ROTTURA 3

Posizione asse neutro $x_{lim} \leq x < h$, flessione semplice o composta

Equazioni di equilibrio

$$N_{Rd} = -b \cdot 0.81 \cdot x \cdot f_{cd} - A'_s \cdot \sigma'_s + A_s \cdot \sigma_s$$

$$M_{rd} = b \cdot 0.81 \cdot x \cdot f_{cd} \cdot \left(\frac{H}{2} - 0.416 \cdot x \right) + A'_s \cdot \sigma'_s \left(\frac{H}{2} - c' \right) + A_s \cdot \sigma_s \left(\frac{H}{2} - c \right)$$



REGIONE DI ROTTURA 4

Posizione asse neutro $h \leq x < H$, flessione semplice o composta

Equazioni di congruenza

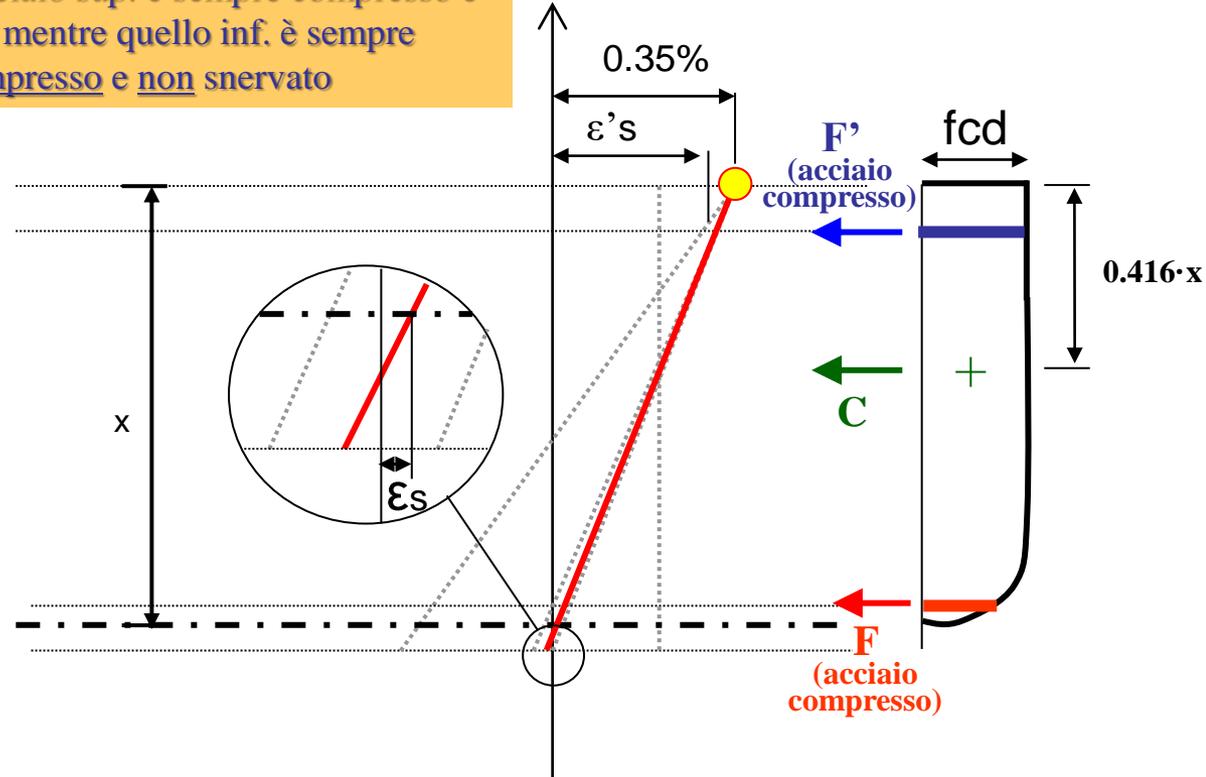
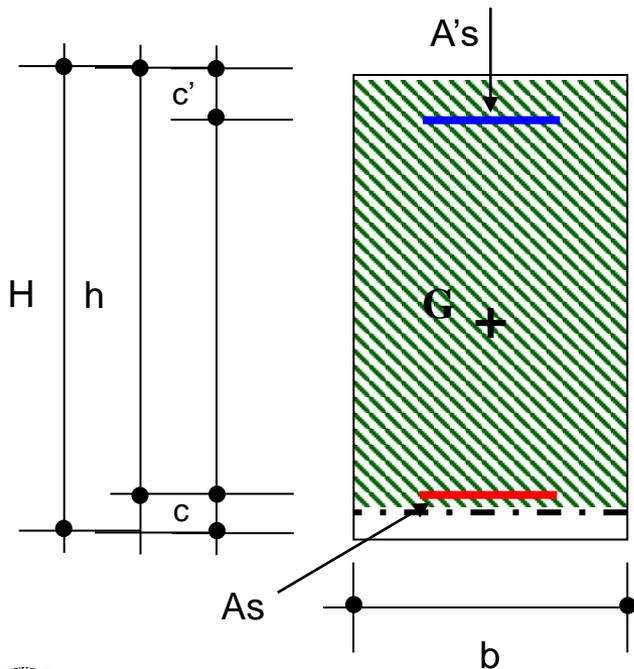
$$\frac{0.35\%}{x} = \frac{\varepsilon'_s}{x - c'} = \frac{\varepsilon_s}{x - h}$$

Equazioni costitutive

$$\varepsilon_s < \varepsilon_{yd} \Rightarrow \sigma_s = \varepsilon_s \cdot E_s$$

$$\varepsilon'_s \geq \varepsilon_{yd} \Rightarrow f_{yd}$$

In Reg.4 l'acciaio sup. è sempre compresso e snervato, mentre quello inf. è sempre compresso e non snervato



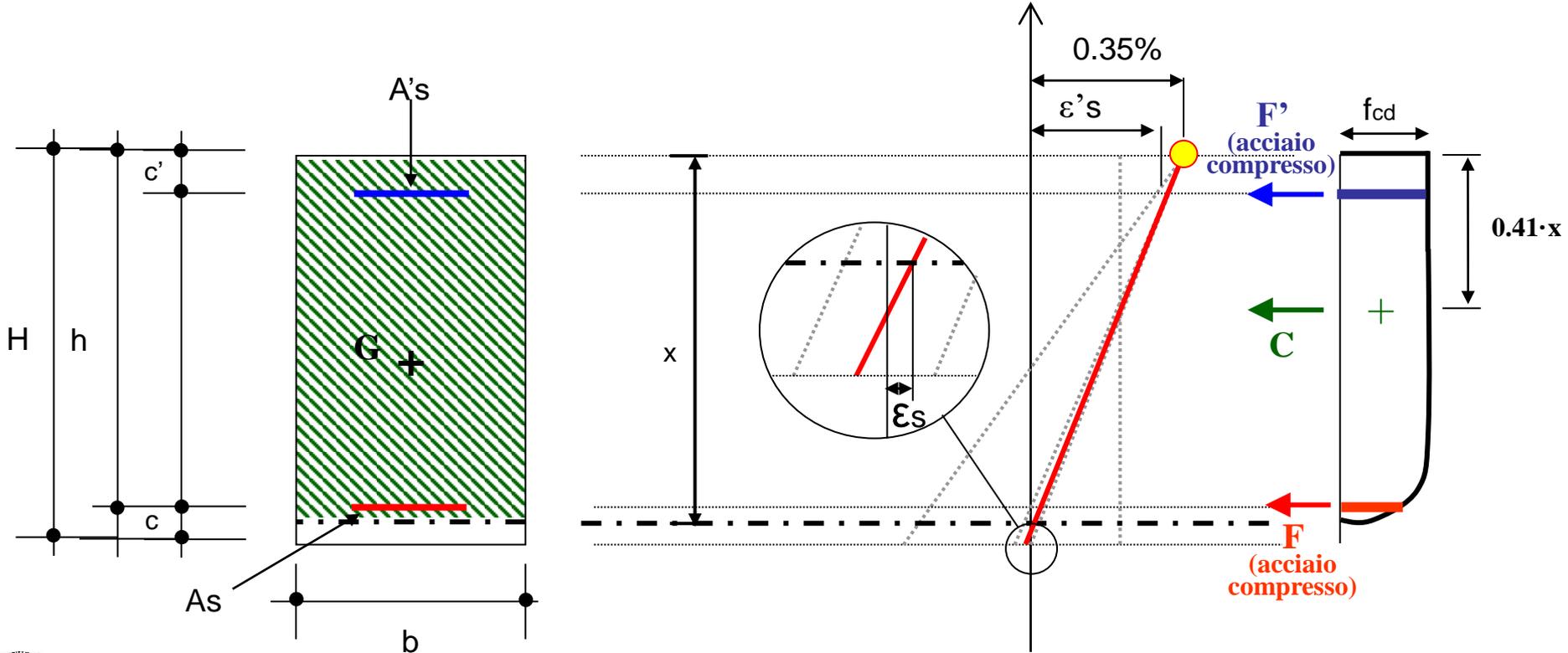
REGIONE DI ROTTURA 4

Posizione asse neutro $h \leq x < H$, flessione semplice o composta

Equazioni di equilibrio

$$N_{Rd} = -b \cdot 0.81 \cdot x \cdot f_{cd} - A'_s \cdot f_{yd} - A_s \cdot \sigma_s$$

$$M_{rd} = b \cdot 0.81 \cdot x \cdot f_{cd} \cdot \left(\frac{H}{2} - 0.416 \cdot x \right) + A'_s \cdot f_{yd} \cdot (H/2 - c') - A_s \cdot \sigma_s \cdot (H/2 - c)$$



REGIONE DI ROTTURA 5

Posizione asse neutro $H = < x < \infty$, compressione semplice o composta

Equazioni di congruenza

$$\frac{0.20\%}{x - 3/7H} = \frac{\varepsilon'_s}{x - c'} = \frac{\varepsilon_s}{x - h}$$

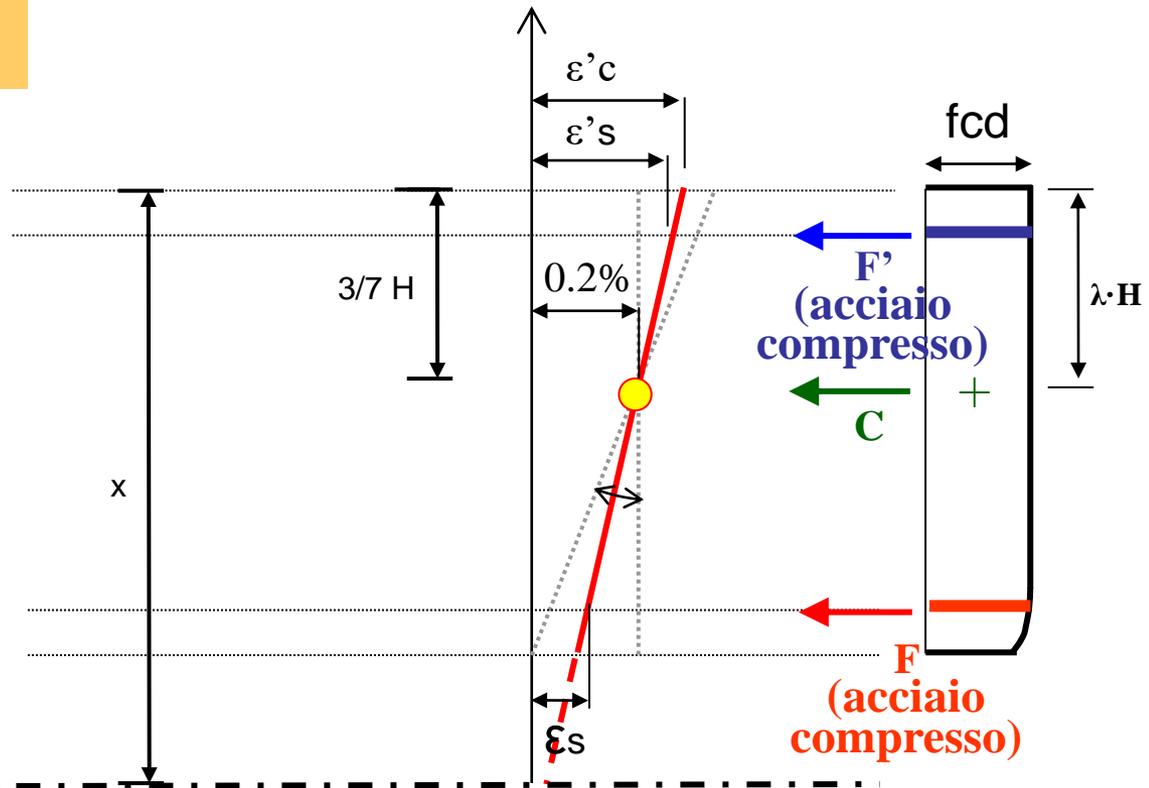
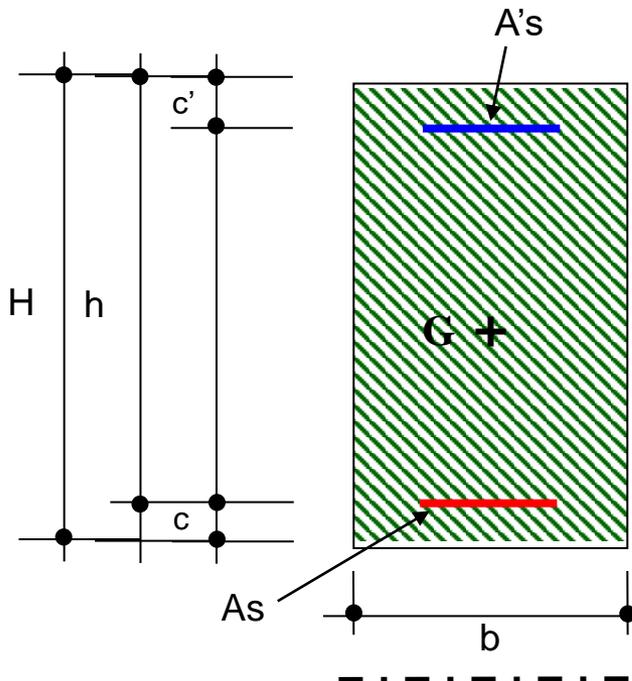
Equazioni costitutive

$$\varepsilon_s < \varepsilon_{yd} \Rightarrow \sigma_s = \varepsilon_s \cdot E_s$$

$$\varepsilon'_s \geq \varepsilon_{yd} \Rightarrow f_{yd}$$

$$\varepsilon_s \geq \varepsilon_{yd} \Rightarrow f_{yd}$$

In Reg.5 l'acciaio sup. è sempre compresso e snervato, mentre quello inf. è sempre compresso



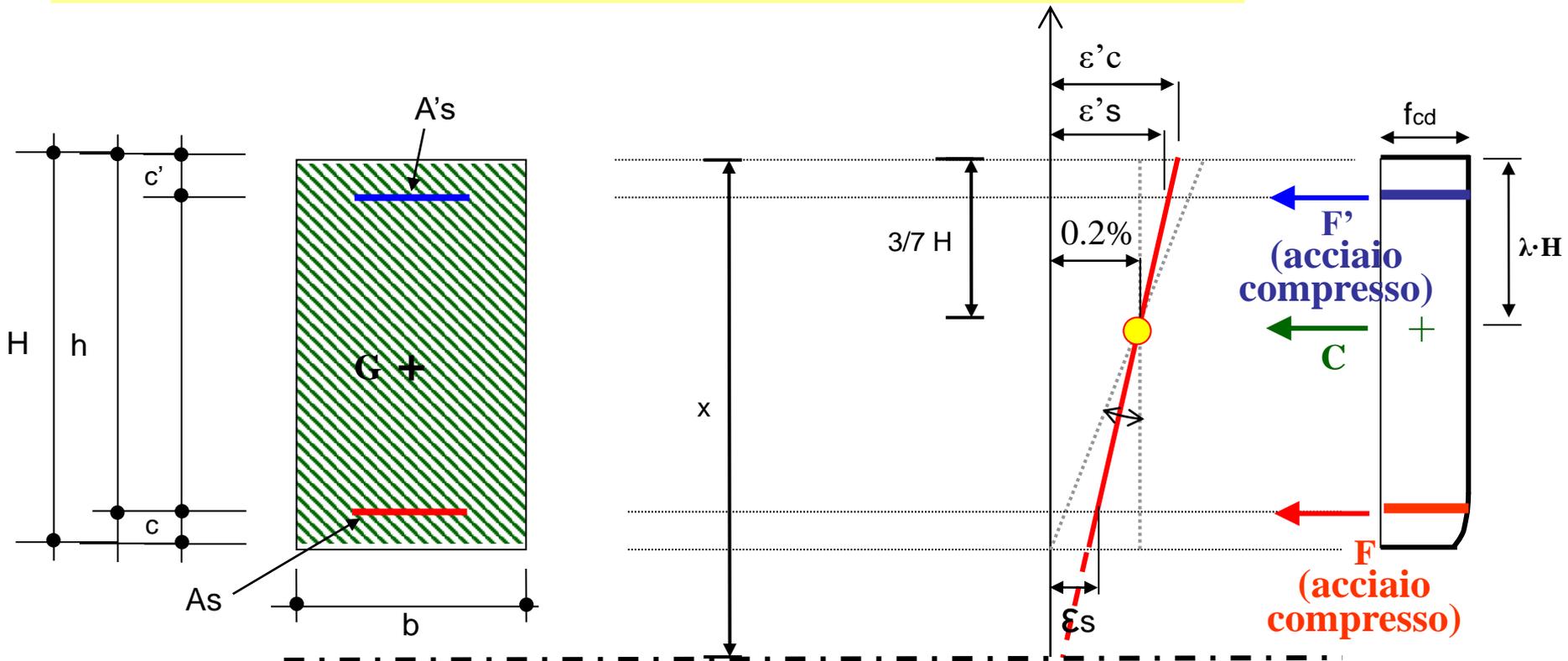
REGIONE DI ROTTURA 5

Posizione asse neutro $H = < x < \infty$, compressione semplice o composta

Equazioni di equilibrio

$$N_{Rd} = -b \cdot \psi \cdot x \cdot f_{cd} - A'_s \cdot f_{yd} - A_s \cdot \sigma_s$$

$$M_{rd} = b \cdot \psi \cdot H \cdot f_{cd} \cdot (\lambda \cdot H - H/2) + A'_s \cdot f_{yd} (H/2 - c') - A_s \cdot \sigma_s (H/2 - c)$$



REGIONE DI ROTTURA 5

Tabella dei parametri ψ e λ per la regione 5 al variare del rapporto $\xi = x/h$

ξ	ψ	λ	ξ	ψ	λ
1,00	0,80953	0,41597	1,65	0,95831	0,48446
1,05	0,83894	0,43144	1,70	0,96153	0,48571
1,10	0,86204	0,44284	1,75	0,96438	0,48681
1,15	0,88049	0,45153	1,80	0,96693	0,48779
1,20	0,89548	0,45832	1,90	0,97127	0,48944
1,25	0,90782	0,46374	2,00	0,97481	0,49007
1,30	0,91809	0,46814	2,25	0,98125	0,49318
1,35	0,92674	0,47177	2,50	0,98551	0,49475
1,40	0,93409	0,47480	2,75	0,98846	0,49583
1,45	0,94039	0,47736	3,00	0,99059	0,49661
1,50	0,94583	0,47954	3,50	0,99341	0,49763
1,55	0,95054	0,48142	4,00	0,99513	0,49825
1,60	0,95467	0,48304	5,00	0,99702	0,49893
			> 5,00	1,00000	0,50000

S.L.U.: SFORZO NORMALE E FLESSIONE

NTC 2018, §4.1.2.3.4.2 Verifiche di resistenza e duttilità

La *verifica di resistenza* (SLU) si ritiene soddisfatta se risulta:

$$M_{Rd} = M_{Rd}(N_{Ed}) \geq M_{Ed}$$

dove:

- M_{Rd} è il valore di calcolo del momento resistente corrispondente a N_{Ed}
- N_{Ed} è il valore di calcolo della componente assiale (sforzo normale) dell'azione;
- M_{Ed} è il valore di calcolo della componente flettente dell'azione.

Al fine di determinare il **momento resistente** M_{Rd} è necessario valutare la **posizione dell'asse neutro** (x)

S.L.U.: SFORZO NORMALE E FLESSIONE

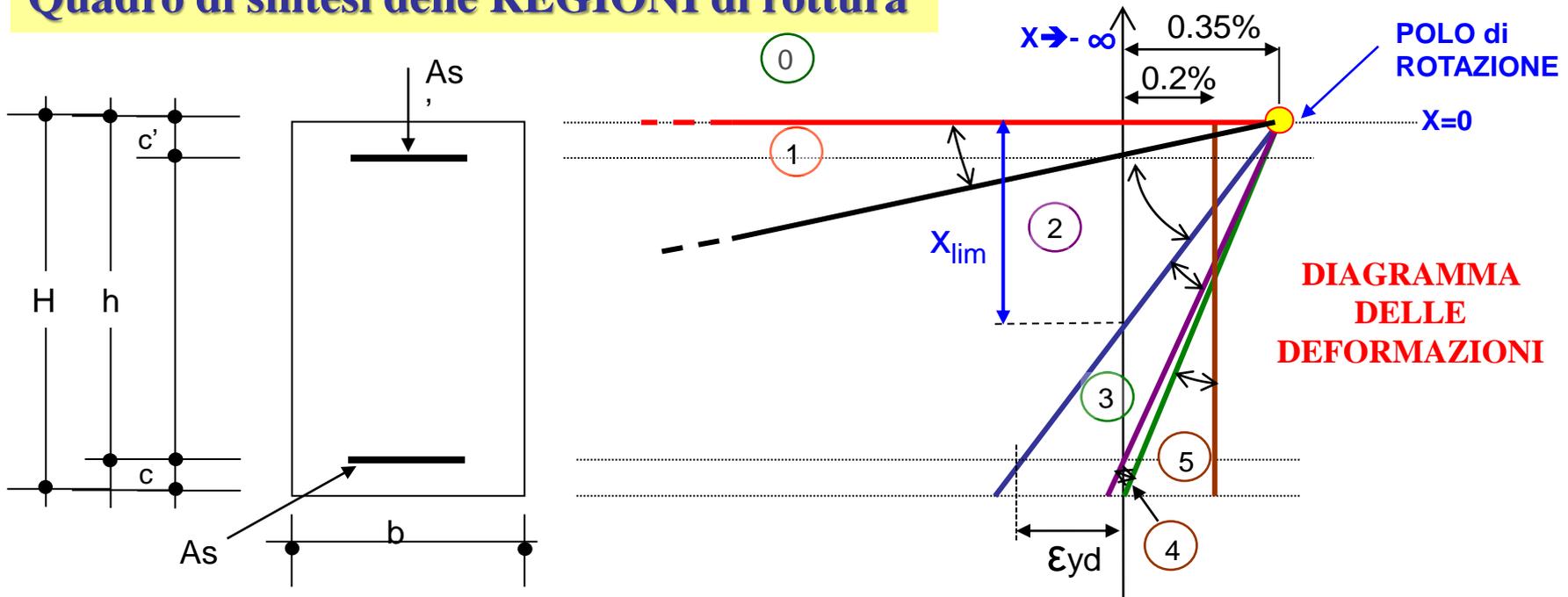
La procedura per la valutazione della posizione dell'asse neutro si può sintetizzare in 5 passi:

- 1) si ipotizza la regione di rottura e si assume una posizione di tentativo x_{tent} dell'asse neutro;
- 2) si valuta la tensione dell'acciaio teso/compresso (snervato o in fase elastica) e il corrispondente valore del coefficiente ψ
- 3) si impone l'equilibrio alla traslazione e si calcola la posizione dell'asse neutro x_{calc} che risulterà diversa dal valore ipotizzato x_{tent}
- 4) si iterano le fasi (2)-(3) assumendo come valore di tentativo il valore di x determinato in (3) fino a rendere sufficientemente piccolo lo scarto relativo tra due iterazioni
- 5) nota la posizione dell'asse neutro (e di λ) si calcola il valore del momento resistente imponendo l'equilibrio alla rotazione

NOTA: per le regioni 1÷4, il valore di x è univocamente determinato dalla (3) ipotizzando la sola condizione sulla tensione dell'acciaio teso/compresso (ψ è costante)

S.L.U.: SFORZO NORMALE E FLESSIONE

Quadro di sintesi delle REGIONI di rottura



Regione 0: posizione asse neutro $-\infty < x < 0 \rightarrow$ trazione semplice o composta

Regione 1: posizione asse neutro $0 \leq x < c' \rightarrow$ flessione semplice o composta

Regione 2: posizione asse neutro $c' \leq x < x_{lim} \rightarrow$ flessione semplice o composta

Regione 3: posizione asse neutro $x_{lim} \leq x < h \rightarrow$ flessione semplice o composta

Regione 4: posizione asse neutro $h \leq x < H \rightarrow$ flessione semplice o composta

Regione 5: posizione asse neutro $H \leq x < \infty \rightarrow$ compressione semplice o composta

Verifiche SLU per tensioni normali

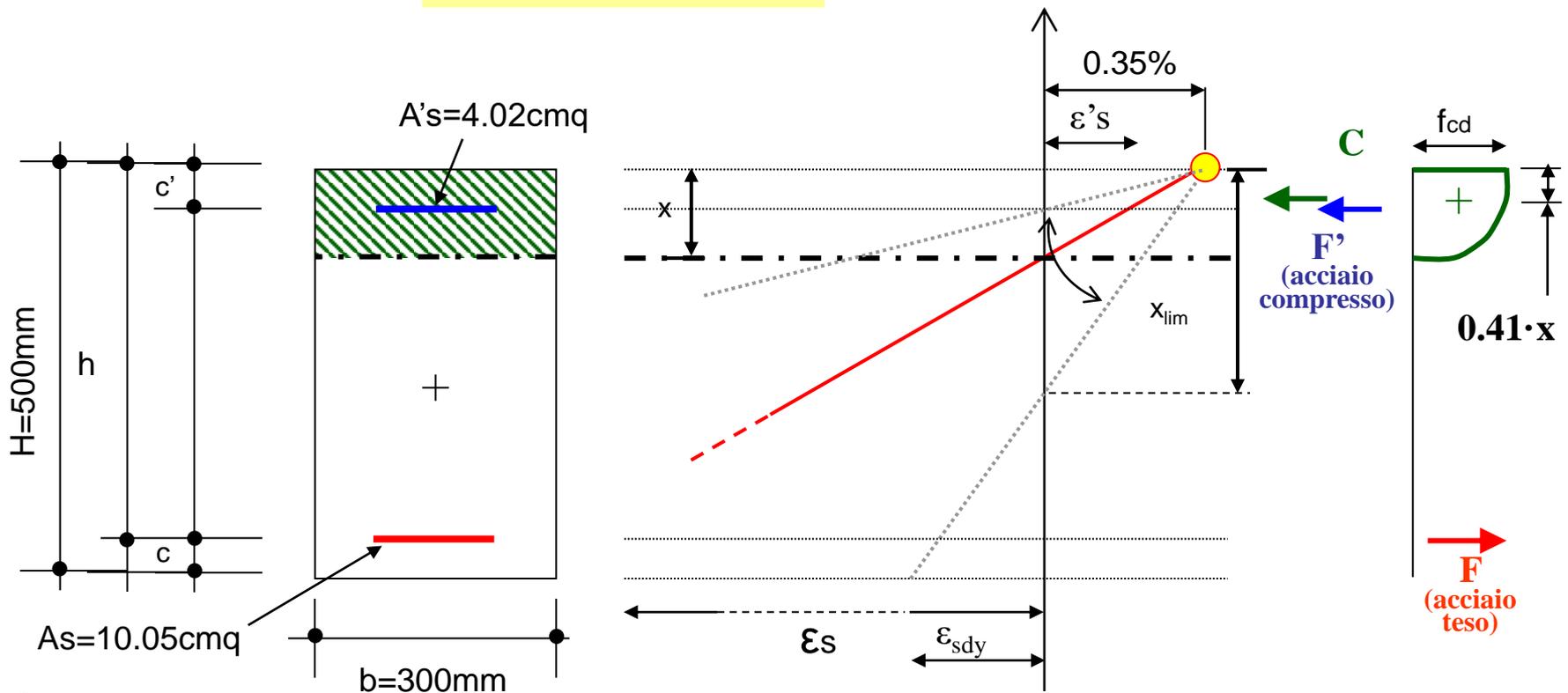
Esempio: sezione semplicemente inflessa

- ipotesi 1: siamo in regione di rottura 2
- ipotesi 2: l'acciaio compresso è snervato $\Rightarrow \varepsilon'_s > \varepsilon_{yd} \Rightarrow \sigma'_s = f_{yd}$

Dati:

$N=0$

$f_{ck}=20\text{N/mm}^2$, $f_{yk}=450\text{N/mm}^2$
diagramma σ - ε acciaio tipo (b)



Verifiche SLU per tensioni normali

Esempio: sezione semplicemente inflessa

• equilibrio alla traslazione

$$-b \cdot \psi \cdot x \cdot f_{cd} - A'_s \cdot f_{yd} + A_s \cdot f_{yd} = 0$$

• posizione dell'asse neutro

$$x = \frac{(A_s - A'_s) \cdot f_{yd}}{\psi \cdot b \cdot f_{cd}} = \frac{(1005 - 402) \cdot 391}{0.81 \cdot 300 \cdot 11.3} = 86 \text{ mm}$$

• verifica delle ipotesi:

$$86 \text{ mm} = x < x_{\text{lim}} = 329 \text{ mm} \Rightarrow \text{verificato}$$

$$\varepsilon'_s = \varepsilon_{cu} \cdot \left(1 - \frac{c'}{x}\right) = 0.0022 > 0.0019 = \frac{f_{yd}}{E_s} \Rightarrow \text{verificato}$$

Calcolo Momento resistente

Effettuando l'equilibrio rispetto al baricentro geometrico G della sezione si ottiene:

$$M_{Rd} = b \cdot \psi \cdot x \cdot f_{cd} \left(\frac{H}{2} - \lambda x\right) + A'_s \cdot f_{yd} \left(\frac{H}{2} - c'\right) + A_s \cdot f_{yd} \left(\frac{H}{2} - c\right)$$

Assumendo $\psi = 0.81$ e $\lambda = 0.41$ si calcola:

$$M_{Rd} = 171.6 \text{ kNm}$$

S.L.U.: SFORZO NORMALE E FLESSIONE

Dalle NTC 2018: Analisi della sezione

Nel caso di pilastri soggetti a compressione assiale, si deve comunque assumere una componente flettente dello sforzo $M_{Ed} = e \times N_{Ed}$ con eccentricità e pari almeno a $0,05h \geq 20\text{mm}$ (con h altezza della sezione).

Dalla Circolare alle NTC 2018

C4.1.2.3.4.2 Analisi della sezione

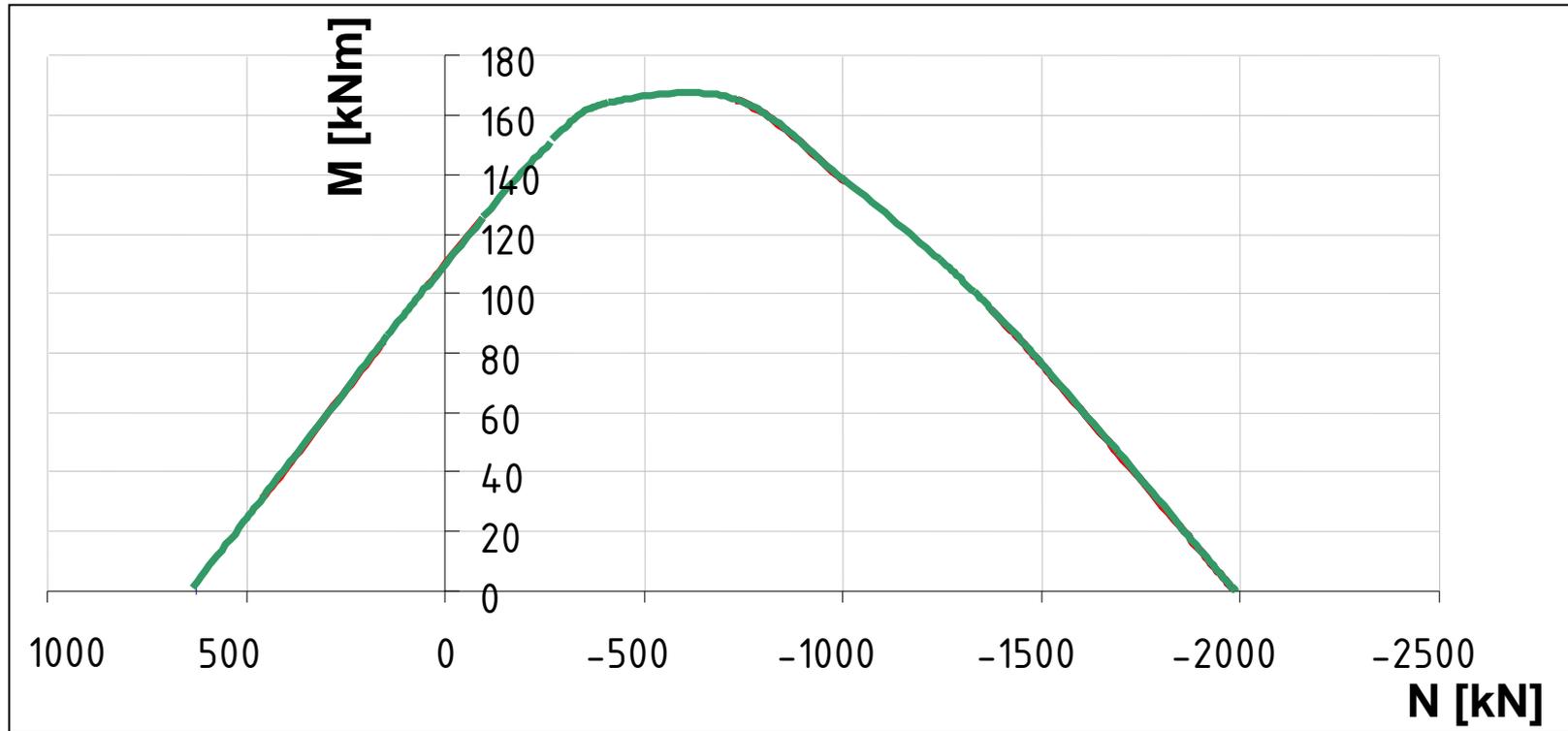
Con riferimento alla verifica di resistenza dei pilastri in c.a. soggetti a sola compressione assiale, la prescrizione circa l'eccentricità minima dell'azione assiale da tenere in conto può essere implicitamente soddisfatta valutando N_{Rd} con la formula:

$$N_{Rd} = 0,8 A_c f_{cd} + A_{s,tot} f_{yd}$$

con A_c area del calcestruzzo e $A_{s,tot}$ area totale d'armatura.

VERIFICHE AGLI STATI LIMITE ULTIMI: DOMINI M-N

Esempio di dominio M-N



La frontiera del dominio di resistenza M-N è costituita dal luogo dei punti del piano N-M corrispondenti alle coppie di coordinate M (momento flettente) ed N (sforzo normale) che determinano la crisi della sezione

Domini M – N allo Stato Limite Ultimo

Verifica delle sezioni mediante domini M-N

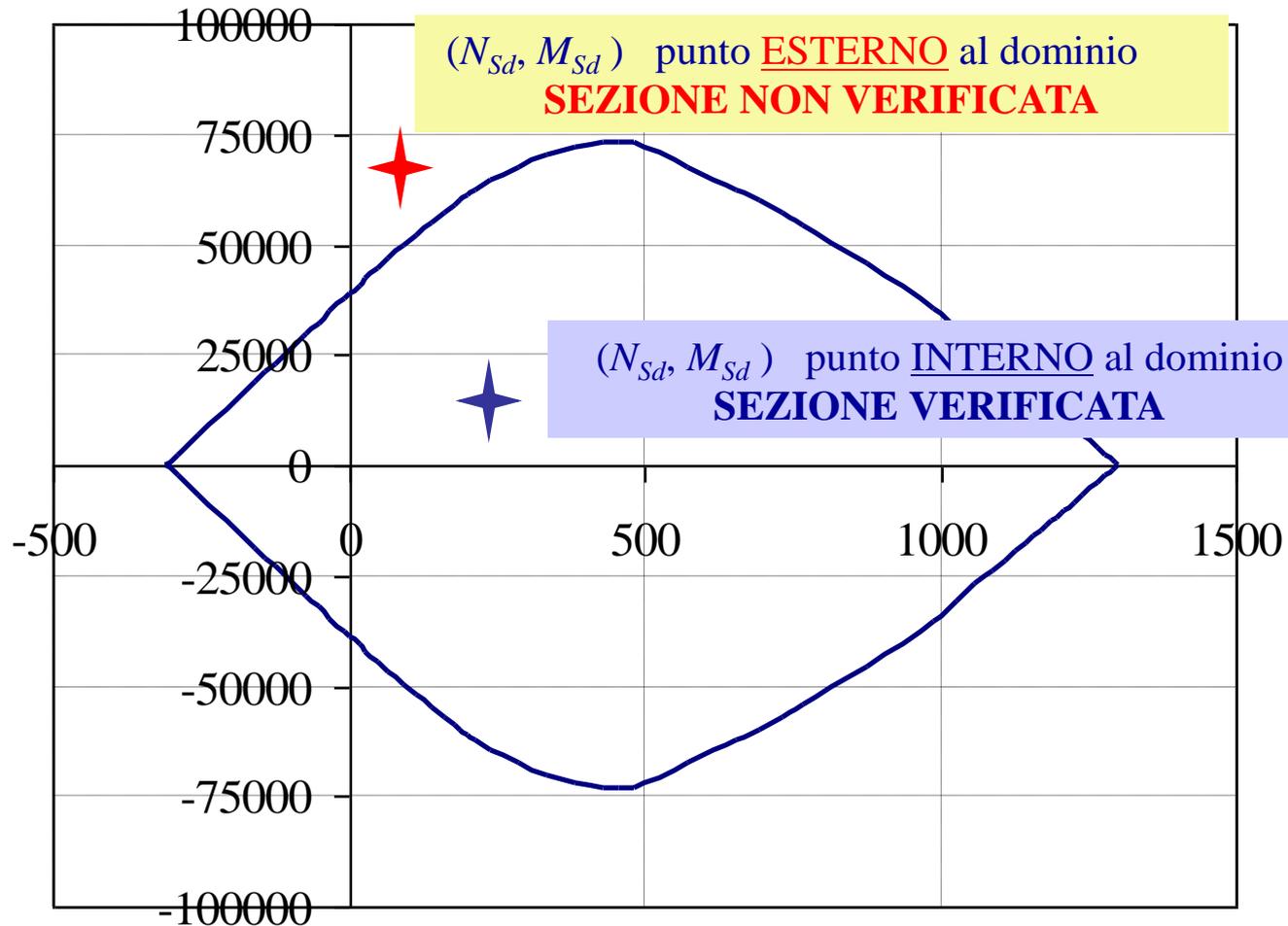
1. Si costruisce il dominio di resistenza M-N della sezione utilizzando le *equazioni di congruenza*, di *equilibrio alla traslazione* e di *equilibrio alla rotazione*.
2. Si considera la coppia M_{Sd} ed N_{Sd} (momento flettente e sforzo normale) che sollecita la sezione.
3. Si riporta sul diagramma il punto di coordinate (N_{Sd}, M_{Sd})
4. Si presentano due possibilità:

(N_{Sd}, M_{Sd}) punto INTERNO al dominio → **SEZIONE VERIFICATA**

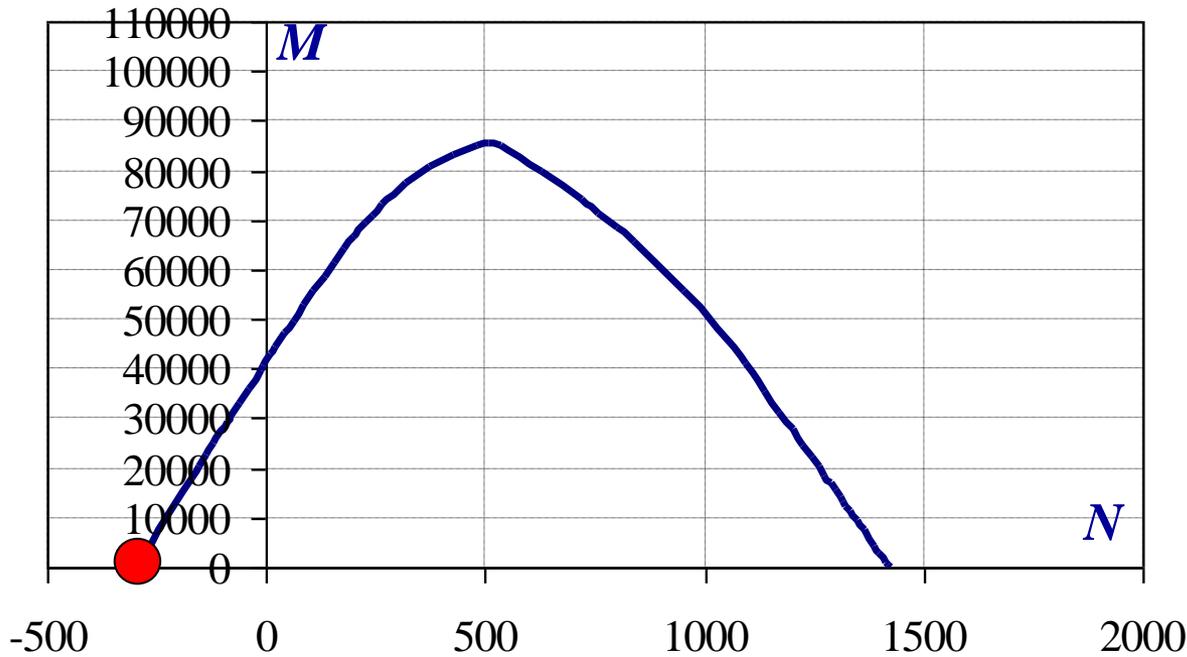
(N_{Sd}, M_{Sd}) punto ESTERNO al dominio → **SEZIONE NON VERIFICATA**

Domini M – N allo Stato Limite Ultimo

Verifica delle sezioni mediante domini M-N



Costruzione del dominio M – N allo Stato Limite Ultimo



Regione di rottura 0

a.n. $-\infty < x \leq 0$

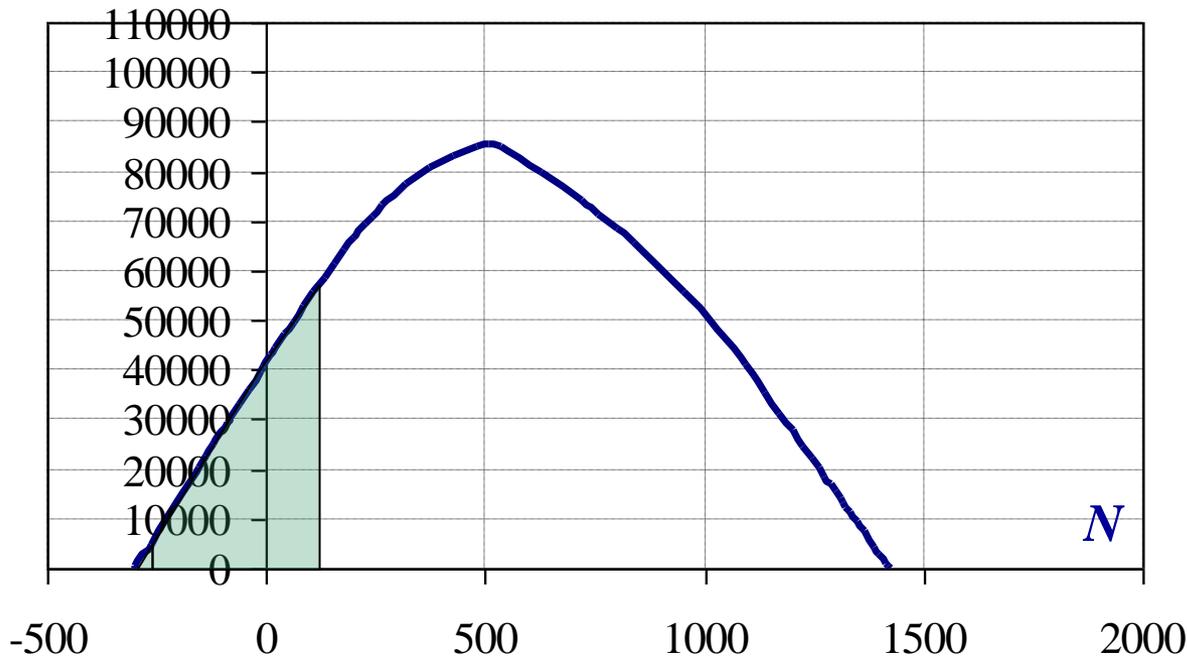
Lo sforzo normale di trazione e del momento resistente nel dominio M-N è un punto il cui valore si ricava dalle due equazioni di equilibrio

NOTA: $M_{rd} = 0$ per sezioni con armatura simmetrica

$$N_{Rd} = +A'_s \cdot f_{yd} + A_s \cdot f_{yd}$$

$$M_{rd} = A'_s f_{yd} \left(\frac{H}{2} - c' \right) - A_s f_{yd} \left(\frac{H}{2} - c \right)$$

Costruzione del dominio M – N allo Stato Limite Ultimo



Regione di rottura 1

$$\text{a.n. } 0 \leq x < c'$$

Equazioni di congruenza

$$\frac{0.35\%}{x} = \frac{\varepsilon'_s}{c' - x} = \frac{\varepsilon_s}{h - x}$$

Equazioni costitutive

$$\varepsilon_s \geq \varepsilon_{yd} \Rightarrow f_{yd}$$

$$\varepsilon'_s \geq \varepsilon_{yd} \Rightarrow f_{yd}$$

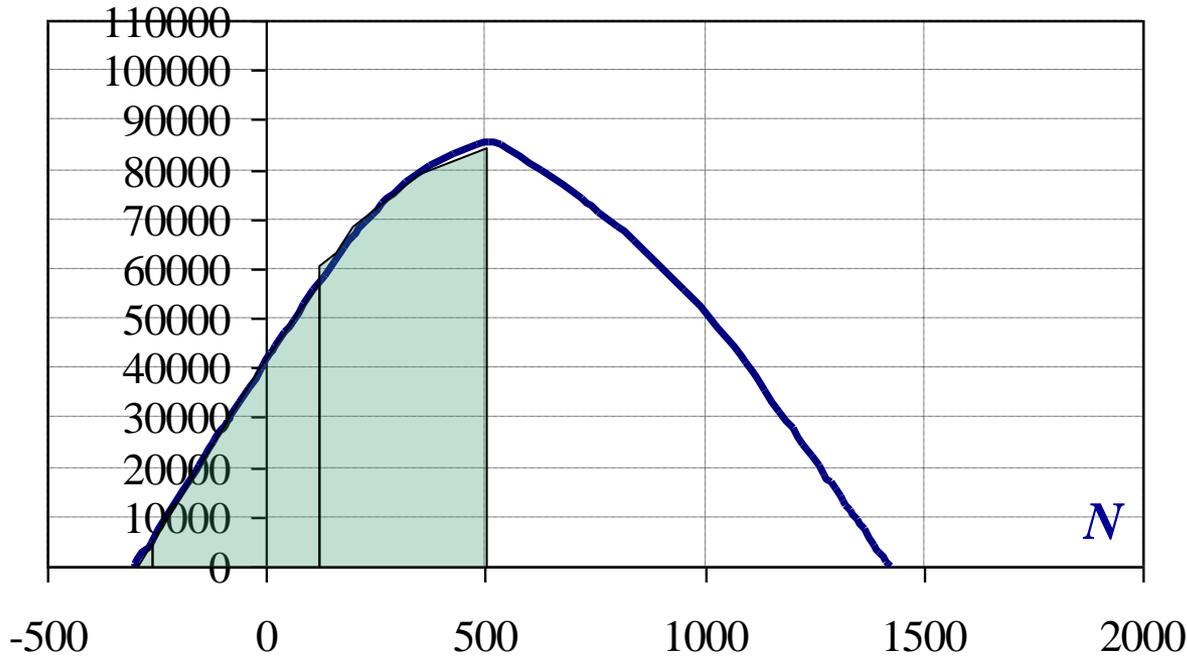
$$\varepsilon'_s < \varepsilon_{yd} \Rightarrow \sigma'_s = \varepsilon'_s \cdot E_s$$

Equazioni di equilibrio

$$N_{Rd} = -b \cdot 0.81 \cdot x \cdot f_{cd} + A'_s \cdot \sigma'_s + A_s \cdot f_{yd}$$

$$M_{rd} = -b \cdot 0.81 \cdot x \cdot f_{cd} \cdot \left(H/2 - 0.41 \cdot x \right) + A'_s \cdot \sigma'_s \left(H/2 - c' \right) - A_s \cdot f_{yd} \left(H/2 - c \right)$$

Costruzione del dominio M – N allo Stato Limite Ultimo



Regione di rottura 2

$$\text{a.n. } c' \leq x < x_{\text{lim}}$$

Equazioni di congruenza

$$\frac{0.35\%}{x} = \frac{\varepsilon'_s}{x - c'} = \frac{\varepsilon_s}{h - x}$$

Equazioni costitutive

$$\varepsilon_s \geq \varepsilon_{yd} \Rightarrow f_{yd}$$

$$\varepsilon'_s \geq \varepsilon_{yd} \Rightarrow f_{yd}$$

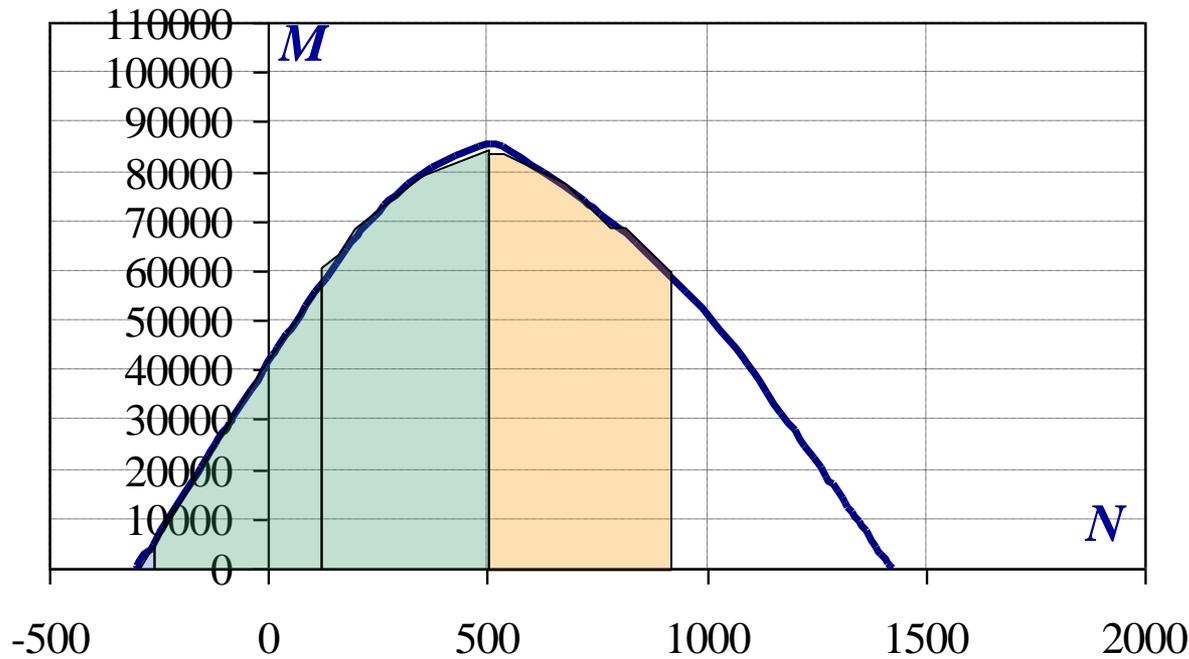
$$\varepsilon'_s < \varepsilon_{yd} \Rightarrow \sigma'_s = \varepsilon'_s \cdot E_s$$

Equazioni di equilibrio

$$N_{Rd} = -b \cdot 0.81 \cdot x \cdot f_{cd} - A'_s \cdot \sigma'_s + A_s \cdot f_{yd}$$

$$M_{Rd} = b \cdot 0.81 \cdot x \cdot f_{cd} \cdot \left(H/2 - 0.41 \cdot x \right) + A'_s \cdot \sigma'_s \left(H/2 - c' \right) + A_s \cdot f_{yd} \left(H/2 - c \right)$$

Costruzione del dominio M – N allo Stato Limite Ultimo



Regione di rottura 3

$$\text{a.n. } x_{\text{lim}} \leq x < h$$

Equazioni di congruenza

$$\frac{0.35\%}{x} = \frac{\varepsilon'_s}{x - c'} = \frac{\varepsilon_s}{h - x}$$

Equazioni costitutive

$$\varepsilon_s < \varepsilon_{yd} \Rightarrow \sigma_s = \varepsilon_s \cdot E_s$$

$$\varepsilon'_s < \varepsilon_{yd} \Rightarrow \sigma'_s = \varepsilon'_s \cdot E_s$$

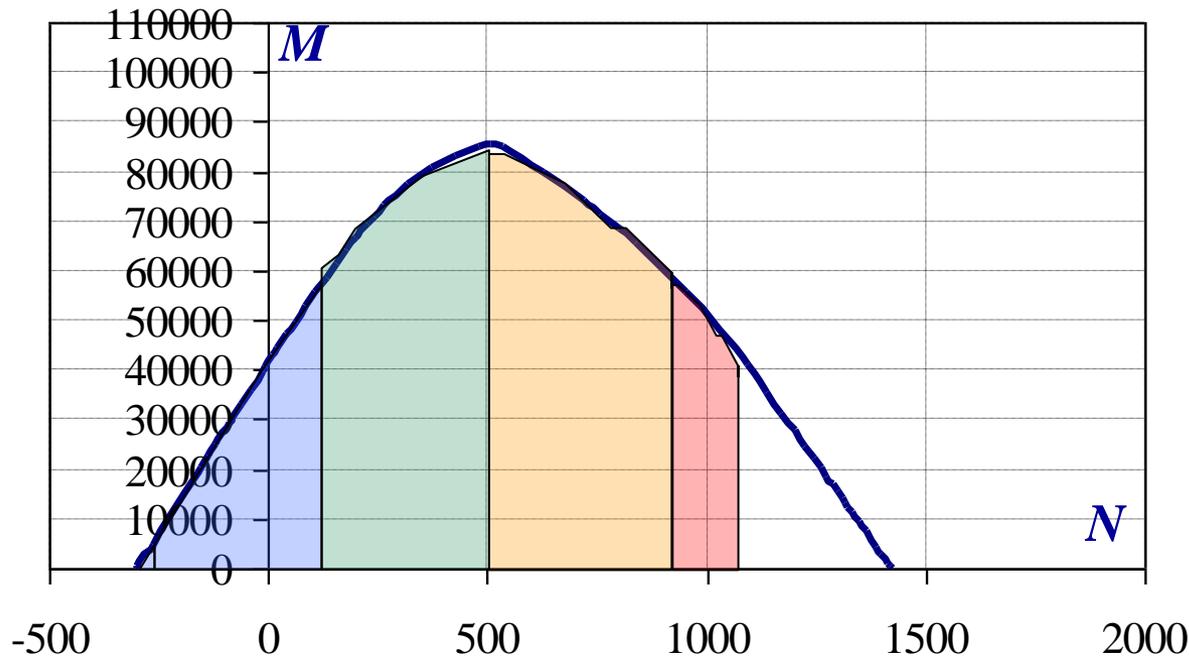
$$\varepsilon'_s \geq \varepsilon_{yd} \Rightarrow f_{yd}$$

Equazioni di equilibrio

$$N_{Rd} = -b \cdot 0.81 \cdot x \cdot f_{cd} - A'_s \cdot \sigma'_s + A_s \cdot \sigma_s$$

$$M_{rd} = b \cdot 0.81 \cdot x \cdot f_{cd} \cdot \left(H/2 - 0.416 \cdot x \right) + A'_s \cdot \sigma'_s \left(H/2 - c' \right) + A_s \cdot \sigma_s \left(H/2 - c \right)$$

Costruzione del dominio M – N allo Stato Limite Ultimo



Regione di rottura 4

$$\text{a.n. } h \leq x < H$$

Equazioni di congruenza

$$\frac{0.35\%}{x} = \frac{\varepsilon'_s}{x - c'} = \frac{\varepsilon_s}{x - h}$$

Equazioni costitutive

$$\varepsilon_s < \varepsilon_{yd} \Rightarrow \sigma_s = \varepsilon_s \cdot E_s$$

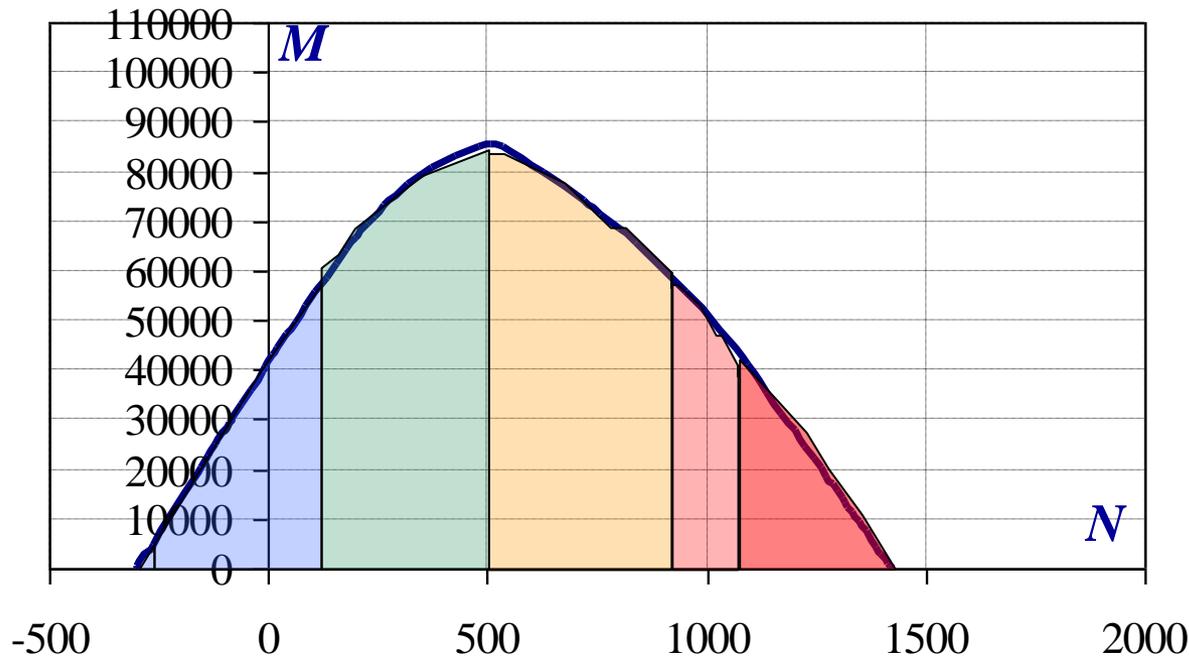
$$\varepsilon'_s \geq \varepsilon_{yd} \Rightarrow f_{yd}$$

Equazioni di equilibrio

$$N_{Rd} = -b \cdot 0.81 \cdot x \cdot f_{cd} - A'_s \cdot f_{yd} - A_s \cdot \sigma_s$$

$$M_{Rd} = b \cdot 0.81 \cdot H \cdot f_{cd} \cdot \left(H/2 - 0.41 \cdot x \right) + A'_s \cdot f_{yd} \left(H/2 - c' \right) - A_s \cdot \sigma_s \left(H/2 - c \right)$$

Costruzione del dominio M – N allo Stato Limite Ultimo



Regione di rottura 5

$$\text{a.n. } H \leq x < \infty$$

Equazioni di congruenza

$$\frac{0.20\%}{x - 3/7 H} = \frac{\varepsilon'_s}{x - c'} = \frac{\varepsilon_s}{x - h}$$

$$\varepsilon'_s \geq \varepsilon_{yd} \Rightarrow f_{yd}$$

$$\varepsilon_s < \varepsilon_{yd} \Rightarrow \sigma_s = \varepsilon_s \cdot E_s$$

$$\varepsilon_s \geq \varepsilon_{yd} \Rightarrow f_{yd}$$

Equazioni di equilibrio

$$N_{Rd} = -b \cdot \psi \cdot x \cdot f_{cd} - A'_s \cdot f_{yd} - A_s \cdot \sigma_s$$

$$M_{rd} = b \cdot \psi \cdot H \cdot f_{cd} \cdot (\lambda \cdot H - H/2) + A'_s \cdot f_{yd} (H/2 - c') - A_s \cdot \sigma_s (H/2 - c)$$

Utilizzo dei domini M – N per progetto-verifica

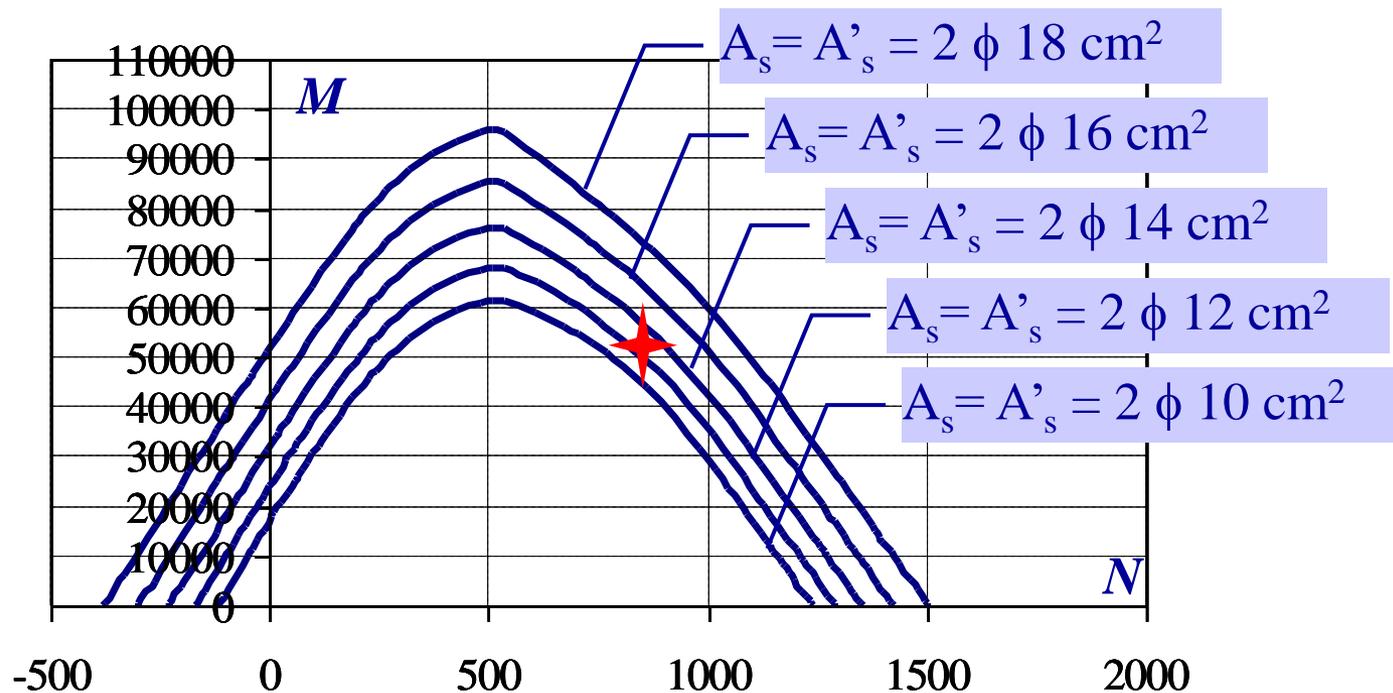
Le dimensioni della sezione sono note.

Si stabilisce a priori il rapporto tra A_s ed A'_s ;

Si costruiscono i domini M-N per diverse quantità di armatura.

Si riporta sul diagramma il punto di coordinate (N_{sd}, M_{sd})

Si determina la quantità di armatura necessaria



Costruzione del dominio di resistenza M-N

Verifica C.A. S.L.U. - File

File Materiali Opzioni Visualizza Progetto Sez. Rett. Sismica Normativa: NTC 2008 ?

Titolo : sezione 30x50

N° strati barre 2 Zoom

N°	b [cm]	h [cm]
1	30	50

N°	As [cm²]	d [cm]
1	4.02	3
2	4.02	47

Tipo Sezione
 Rettan.re Trapezi
 a T Circolare
 Rettangoli Coord.

Sollecitazioni
S.L.U. Metodo n

N_{Ed} 0 0 kN
M_{xEd} 0 0 kNm
M_{yEd} 0 0

P.to applicazione N
 Centro Baricentro cls
 Coord.[cm] xN 0 yN 0

Tipo rottura
Lato calcestruzzo - Acciaio snervato

Metodo di calcolo
 S.L.U.+ S.L.U.-
 Metodo n

Tipo flessione
 Retta Deviata

Calcola MRd **Domino M-N**

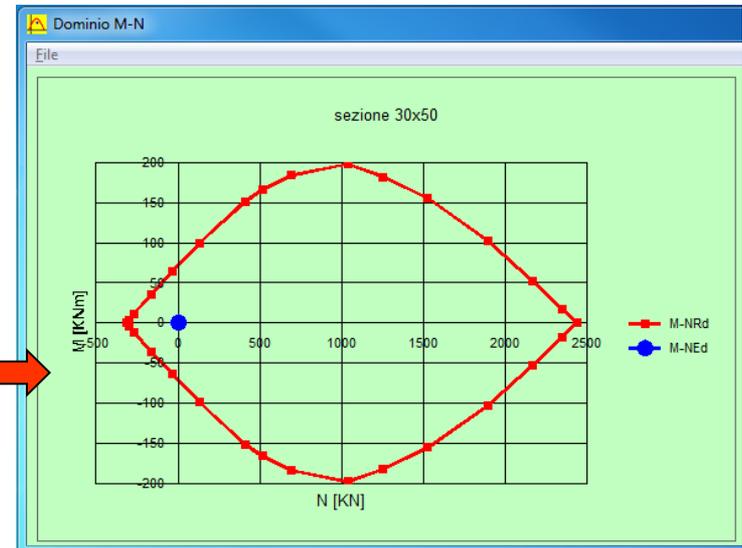
L₀ 0 cm Col. modello

Precompresso

M_{xRd} 71.06 kN m
σ_c -14.17 N/mm²
σ_s 391.3 N/mm²
ε_c 3.5 ‰
ε_s 43.99 ‰
d 47 cm
x 3.464 x/d 0.0737
δ 0.7

Materiali
B450C C25/30
E_{su} 67.5 ‰ E_{c2} 2 ‰
f_{yd} 391.3 N/mm² E_{cu} 3.5 ‰
E_s 200,000 N/mm² f_{cd} 14.17 ‰
E_s/E_c 15 f_{cc}/f_{cd} 0.8
ε_{syd} 1.957 ‰ σ_{c,adm} 9.75 ‰
σ_{s,adm} 255 N/mm² τ_{co} 0.6
τ_{c1} 1.829

Costruzione del dominio utilizzando il programma VCA/SLU sviluppato dal Prof. Gelfi (UniBS)



http://gelfi.unibs.it/software/programmi_studenti.html

NB: Per utilizzare il programma installare anche il pacchetto comune